Hommage de la S. A. MANUFACTURE DE
LAMPES A INCANDESCENCE PHILIPS,
Eindhoven (Hollande)

ÉTUDE CRITIQUE
DES
PROCÉDÉS GRAPHIQUES OU ANALYTIQUES
pour la détermination
DU
FLUX LUMINEUX DES SOURCES DE LUMIÈRE

PAR
Edw. L. J. MATTHEWS
Ingénieur du Bureau d'études Philips



IMPRIMERIE F. & R. BUYCK FRÈRES, GAND.

ÉTUDE CRITIQUE

DES

PROCÉDÉS GRAPHIQUES OU ANALYTIQUES

pour la détermination

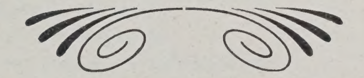
DU

FLUX LUMINEUX DES SOURCES DE LUMIÈRE

PAR

Edw. L. J. MATTHEWS

Ingénieur du Bureau d'études Philips



IMPRIMERIE F. & R. BUYCK FRÈRES, GAND.

TABLE DES MATIÈRES.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

N. B. Les pages en gros caractères sont celles où il est traité d'une façon plus détaillée des travaux des auteurs en question.

Abréviations employées pour les références bibliographiques.

Ann. Ch. Ph.	=	Annales de Chimie et de Physique (Paris).
C. R. Anv. 1885	=	Exposition Universelle d'Anvers, 1885. Comptes rendus des travaux du Comité international chargé des essais électriques. (Liége, 1887).
E. T. Z.	=	Elektrotechnische Zeitschrift (Berlin).
E. u M.	=	Elektrotechnik und Maschinenbau (Vienne).
Ecl. El.	=	L'Eclairage Electrique (Paris).
El. Anz	=	Elektrotechnischer Anzeiger (Berlin).
Electr.	=	The Electrician (Londres).
Elet.	=	L'Elettrotecnica (Milan)
El. W.	=	Electrical World (New-York).
G. E. R.	=	General Electric Review (New-York).
Hel.	=	Helios (Leipzig).
Ill. Eng. (Lnd)	=	The Illuminating Engineer (Londres).
Ill. Eng. (N. Y.)	=	The Illuminating Engineer (New-York).
Ing. Cons.	=	L'Ingénieur-Conseil (Paris).
J. f. G. u. W.	=	Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung (Munich-Berlin).
J. I. E. E.	=	Journal of the Institution of Electrical Engineers (Londres).
K. Ac. W.	=	Koninklijke Academie van Wetenschappen. Verslagen van de gewone vergaderingen der afdeeling natuurkunde (Amsterdam).
L. u L.	=	Licht und Lampe (Berlin).
Lum. El.	=	La Lumière Electrique (Paris).
Rass Tecn.	=	Rassegna Tecnica (Messine).
R. G. E.	=	Revue Générale de l'Electricité (Paris).
T. I. E. S.	=	Transactions of the Illuminating Engineering Society (New-York)
Z. f. Bel.	=	Zeitschrift für Beleuchtungswesen Berlin).
Z f Instr.	=	Zeitschrift für Instrumentenkunde (Berlin).

ERRATA.

---

p. 1 ligne 15 : lire « contraint » au lieu de « contraints ».
p. 4 ligne 9 : lire « I'_α » au lieu de « (2 ×) ».
p. 7 1re note au pied de la page : à compléter par « p. 23. ».
p. 9 ligne 15 : lire « Le Blanc » au lieu de « Leblanc ».
p. 13 ligne 2 : mettre un point après « nulle » et supprimer le reste de la phrase.
Tableau IV, ligne 5, colonne relative au plan : lire « —1,33 » au lieu de « —13,3 ».
p. 30 2me note au pied de la page, 1re référence : lire « pp. 105 et 245 » au lieu de « p. 105. ».
p. 35 équation (24) : surmonter le premier membre d'un trait horizontal.
p. 36 Tableau IX : lire « Codman » au lieu de « Colman ».
p. 39 ligne 15 : lire « hémisphérique » au lieu de « hémisphère ».
p. 40 note au pied de la page, à compléter par : « E. T. Z. t. XXX, 1909, p. 193. ».
p. 56 note au pied de la page, 1re référence : lire « 1912 ».
p. 71 ligne 2 : lire « affaire » au lieu de « à faire ».
p. 104 note au pied de la page : lire « Treatise » au lieu de « Treatrise ».
p. 108 ligne 8 : lire « α » pour la limite supérieure du premier membre au lieu de « π ».
p. 112 équations (61) : dans I_0 lire $\frac{1}{12}$ au lieu de $\frac{1}{8}$; dans I_6 lire $2\,I_{150°}$ au lieu de $I_{150°}$.
p. 113 remplacer les coefficients de l'équation par les suivants : 0,180, 1,596, 2,872, 3,271.

AVANT-PROPOS.

Dans l'étude qu'on va lire nous avons exposé, coordonné, discuté et développé au besoin, tous les procédés graphiques ou analytiques qui nous sont connus pour la détermination du flux lumineux des luminaires. Les travaux consacrés à ce sujet sont nombreux, mais malheureusement assez éparpillés et pour la plupart très peu connus ; beaucoup d'entre eux sont déjà anciens ou sur le point de le devenir. Souvent il est difficile de se les procurer, surtout en original ; de plus, les redites qui ne sont pas rares, en rendent la lecture plus d'une fois fastidieuse.

Nous croyons par conséquent faire œuvre utile en présentant cette étude, qui, nous l'espérons, permettra aux lecteurs de voir clair dans la question et de s'orienter dans le labyrinthe des travaux déjà publiés. Cependant, en raison des circonstances, rappelées ci-dessus, nous nous voyons contraints de formuler des réserves relativement à l'état plus ou moins complet de notre travail, certaines publications ayant fort bien pu échapper à nos investigations.

Eindhoven, Octobre 1928.

I. — Préliminaires.

Avant d'exposer les diverses méthodes permettant de déterminer le flux lumineux d'une source de lumière, nous indiquerons les principales notations adoptées et nous établirons quelques formules fondamentales dont il sera fait un usage fréquent dans la suite.

1) *Notations et conventions.*

α angle d'inclinaison d'une direction quelconque par rapport à la verticale descendante.

α_{kl} direction de la bissectrice de l'angle compris entre les directions α_k et α_l.

ω angle solide.

ω_{kl} angle solide compris entre les surfaces coniques dont les génératrices ont respectivement les inclinaisons α_k et α_l.

$\alpha_{(kl)}$ inclinaison de la génératrice de la surface conique divisant en deux parties égales l'angle solide ω_{kl}.

I_α intensité lumineuse dans la direction α.

I_{kl} intensité lumineuse dans la direction α_{kl}.

$I_{(kl)}$ intensité lumineuse dans la direction $\alpha_{(kl)}$.

$\emptyset$ flux lumineux.

$\emptyset_{kl}$ flux lumineux rayonné dans l'angle solide ω_{kl}.

Par « courbe polaire » nous entendrons la courbe polaire de l'intensité lumineuse dans un plan méridien du solide photométrique. Sauf indication contraire, celui-ci sera supposé de révolution. Dans ce dernier cas, la partie droite de la courbe polaire sera seule figurée.

Pour simplifier le langage, nous nous servirons dans la suite indifféremment de l'une ou de l'autre des expressions « angle solide zonal » ou simplement « zone », pour désigner des angles solides tels que ω_{kl}.

L'angle $\alpha_l - \alpha_k$ que font entre elles les génératrices des deux surfaces coniques limitant l'angle solide ω_{kl}, situées dans un même plan méridien, sera appelé « l'ouverture » de l'angle solide ω_{kl}.

2) *Flux élémentaire.*

Soit (fig. 1) MN un élément de la courbe polaire d'une source de lumière située en O. Avec un rayon r quelconque traçons une demi-circonférence ABC autour de O comme centre. L'angle $d\alpha$ découpe sur cette circonférence un arc

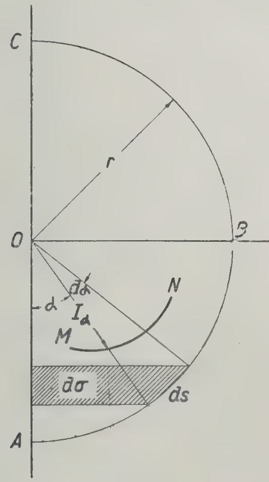


Fig. 1

$$ds = r d\alpha.$$

Par sa rotation autour de l'axe AC du diagramme, cet arc engendre une zone sphérique dont l'aire est égale à

$$d\sigma = 2\pi\, r^2 \sin \alpha\, d\alpha$$

et qui soustend un angle solide au centre

$$d\omega = \frac{d\sigma}{r^2} = 2\pi \sin \alpha\, d\alpha$$

L'intensité lumineuse dans la direction α étant I_α, le flux lumineux rayonné dans cet angle $d\omega$ est

$$d\emptyset = I_\alpha\, d\omega = 2\pi\, I_\alpha \sin \alpha\, d\alpha. \qquad (1)$$

Si le solide photométrique n'est pas de révolution, au lieu d'envisager directement le flux lumineux émis dans l'angle solide zonal $d\omega$ que nous avons considéré, il faut partir de l'expression du flux rayonné dans une portion élémentaire de cet angle, comprise entre deux plans méridiens infiniment voisins, comprenant entre eux un angle dièdre $d\beta$. Ceux-ci et les parallèles α et $\alpha + d\alpha$ déterminent sur la sphère un rectangle élémentaire dont l'aire est représentée par

$$d^2\sigma = (r \sin \alpha\, d\beta)\,(r d\alpha) = r^2 \sin \alpha\, d\alpha\, d\beta$$

et qui sous-entend un angle solide

$$d^2\omega = \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta$$

auquel correspond un flux lumineux

$$d^2\varnothing = \mathrm{I} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta.$$

Intégrant le long du parallèle, cette expression devient

$$d\varnothing = \sin \alpha \, d\alpha \int_o^{2\pi} \mathrm{I} \, d\beta \qquad (2)$$

Or, par définition

$$\int_o^{2\pi} \mathrm{I} \, d\beta = 2\pi \mathrm{I}'_\alpha$$

en appelant (2×) l'intensité lumineuse moyenne suivant le parallèle α. Lorsque l'intensité lumineuse est constante tout le long du parallèle α, les expressions (1) et (2) se confondent.

3) *Formules approchées du flux lumineux partiel rayonné dans un angle solide zonal fini.*

Par la rotation autour de AC des droites Oa et Ob (fig. 2) dont les inclinaisons respectives sont α_k et α_l, deux surfaces coniques sont engendrées, qui comprennent entre elles un angle solide zonal donné par l'expression

$$\omega_{kl} = 2\pi(\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

qui peut encore s'écrire

$$\omega_{kl} = 4\pi \sin \alpha_{kl} \sin \frac{\alpha_l - \alpha_k}{2}.$$

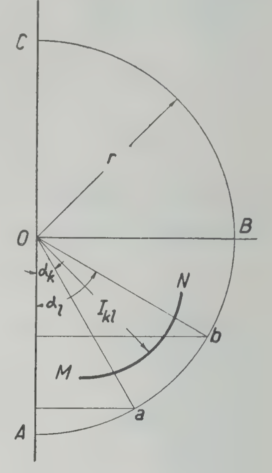


Fig. 2

En supposant l'intensité lumineuse dans l'angle $\alpha_l - \alpha_k$ uniforme et égale à celle mesurée dans la direction bissectrice α_{kl}, l'expression du flux lumineux rayonné dans l'angle solide peut se mettre sous l'une des formes :

$$\varnothing_{kl} = 2\pi \mathrm{I}_{kl}(\cos \alpha_k - \cos \alpha_l) \qquad (3)$$

$$\varnothing_{kl} = 4\pi \mathrm{I}_{kl} \sin \alpha_{kl} \sin \frac{\alpha_l - \alpha_k}{2} \qquad (4)$$

4) *Sources lumineuses hypothétiques simples.*

Pour juger de la précision que permettent d'atteindre les diverses méthodes de détermination du flux lumineux, il est utile de les appliquer à des sources lumineuses hypothétiques, constituées respectivement par une sphère, une demi-sphère, une surface plane et un cylindre. Les courbes

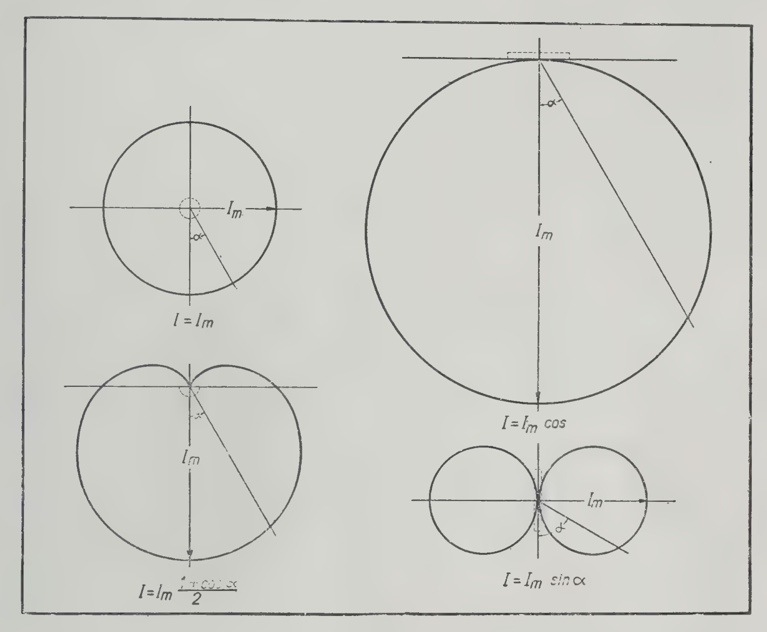


Fig. 3

polaires de ces sources de lumière, supposées de dimensions négligeables par rapport à la distance d'observation, sont exactement connues et peuvent être représentées rigoureusement par des équations. Par conséquent, les flux lumineux correspondant à ces courbes polaires peuvent être déterminés exactement par le calcul. La comparaison de ces résultats théoriques à ceux que donnent les méthodes étudiées, permet de se faire une idée du degré d'exactitude que celles-ci permettent d'atteindre. La figure 3 représente les courbes polaires théoriques, tandis que le tableau I résume leurs équa-

tions et les expressions de leurs flux lumineux, ainsi que la valeur de I_m rendant $\varnothing = 1000$ lumens.

Source de lumière	Sphère	Demi-sphère	Plan	Cylindre
Equation de la courbe polaire	$I = I_m$	$I = I_m \frac{1 + \cos \alpha}{2}$	$I = I_m \cos \alpha$	$I = I_m \sin \alpha$
Flux lumineux	$\varnothing = 4\pi I_m$	$\varnothing = 2\pi I_m$	$\varnothing = \pi I_m$	$\varnothing = \pi^2 I_m$
I_m pour $\varnothing = 1000$	$I_m = 79{,}58$	$I_m = 159{,}16$	$I_m = 318{,}31$	$I_m = 101{,}32$

Tableau I. Equations des courbes polaires des sources lumineuses hypothétiques simples, expressions des flux lumineux correspondants, et valeurs de I_m pour $\varnothing = 1000$ lumens.

5) *Point de vue adopté pour la rédaction de ce travail.*

La plupart des auteurs ont cherché des procédés pour déterminer l'intensité lumineuse moyenne sphérique ou hémisphérique. Dans le présent travail, sans aller jusqu'à en altérer la nature, leurs méthodes seront systématiquement modifiées, afin d'obtenir toujours le flux lumineux. Les démonstrations non plus ne seront pas toujours celles des auteurs originaux. Il ne sera pas fait d'autre mention de ces modifications au cours de cette étude. A quelques exceptions près la recherche des intensités lumineuses sphérique ou hémisphérique moyennes sera passée sous silence.

II. — **Procédés basés sur l'emploi de zones de hauteur constante.**

6) *Diagramme d'Allard.*

En 1879, trois années après avoir défini pour la première

fois la notion d'intensité lumineuse moyenne sphérique (1), Allard indiqua le moyen de déterminer celle-ci à l'aide d'un diagramme (2). L'abscisse de celui-ci (fig. 4) est déterminée par l'expression

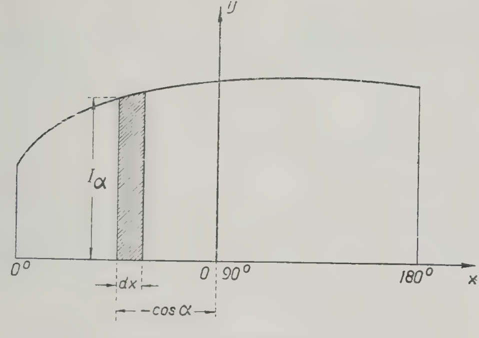


Fig. 4

$$x = - \cos \alpha$$

l'ordonnée étant

$$y = I_\alpha.$$

L'aire élémentaire de cette courbe correspondant à un accroissement $d\alpha$ de l'angle α est donc donnée par l'expression

$$ydx = I_\alpha \sin \alpha \, d\alpha$$

En comparant celle-ci à l'expression (1), on voit que le flux élémentaire correspondant à $d\alpha$ est

$$d\emptyset = 2\pi y dx$$

Pour avoir la valeur exacte du flux lumineux total émis par la source, il suffit donc de multiplier l'aire de la courbe par 2π.

Echelles.

Pour se servir pratiquement d'un diagramme comme celui que nous étudions, il est nécessaire de bien distinguer entre une grandeur physique X, la grandeur graphique $\overline{X}$ qui la représente sur l'épure et l'échelle u_x qui lie ces deux grandeurs entre elles.

En se basant sur les considérations précédentes, il est facile d'établir la relation qui existe entre les échelles des grandeurs figurant dans le diagramme d'Allard.

---

(1) Mémoire sur l'intensité et la portée des phares, Paris, 1876.

(2) Rapport au Conseil Municipal de Paris, sur l'éclairage au moyen de bougies Jablochkoff, Paris, 1879.

Posant

$$u_{\text{I}} = a \, \frac{\text{cm}}{bg}$$

$$u_{\omega} = b \, \frac{\text{cm}}{\text{stéradian}}$$

on trouve pour l'échelle du flux lumineux

$$u_{\varnothing} = \frac{ab}{2\pi} \frac{\text{cm}^2}{\text{lum}}$$

Il est donc toujours possible, en adoptant des valeurs convenables pour a et b, de s'affranchir de la multiplication par le coefficient 2π.

7) *Construction de Rousseau.*

Rousseau (1) a trouvé le moyen de déduire la courbe d'Allard de la courbe polaire par voie entièrement graphique. Cette méthode, devenue classique, est généralement connue de nos jours.

Complétons la figure 1 de la façon suivante. Par le point de rencontre m (fig. 5) de la circonférence avec le rayon d'inclinaison α, abaissons la perpendiculaire mm_1 sur l'axe OA du diagramme. Sur cette perpendiculaire portons l'intensité lumineuse I_α. Cette opération répétée pour tous les points de la courbe polaire donne une nouvelle courbe DEF, qui n'est autre que celle d'Allard, sauf que les abscisses se trouvent multipliées par la constante r. Il est évident dès lors que le flux

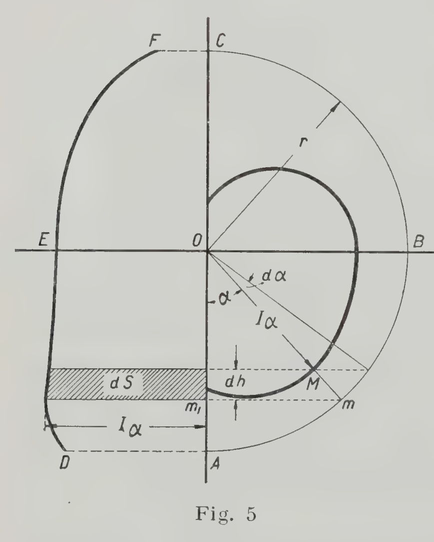


Fig. 5

(1) Ing. Cons. t. V, 1882/83 p. 263.
C. R. Anv. 1885, p. 96.
Lum. El. t. XXVI, 1887, p. 60.

élémentaire est

$$d\phi = \frac{2\pi}{r} dS \qquad (5)$$

en représentant l'aire élémentaire de la courbe par dS. Par conséquent, le flux lumineux total ϕ est donné par l'expression

$$\phi = \frac{2\pi}{r} S \qquad (6)$$

L'application de ce procédé nécessite l'emploi du planimètre pour déterminer l'aire du diagramme.

Il est souvent préférable d'avoir recours à un procédé de quadrature approchée plus rapide.

8) *Méthode employée à Paris en* 1881, *dite ultérieurement méthode de Russell ou de Bloch.*

Une première méthode de quadrature approchée de ce diagramme est celle employée en 1881 à l'Exposition d'Electricité de Paris, par Allard, Leblanc, Joubert, Potier et Tresca, et qui est souvent désignée comme méthode de Russell (1) dans les publications anglaises, ou comme méthode de Bloch (2) dans les publications en langue allemande.

On divise la base du diagramme en un nombre n de parties égales. Par les points de division on mène les ordonnées correspondantes. La méthode consiste alors à remplacer. l'aire des trapèzes curvilignes partiels ainsi obtenus par le produit de leur base par l'ordonnée passant par le point milieu de celle-ci.

L'expression du flux devient alors

$$\phi = \frac{2\pi}{r} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2r}{n} I_{(kl)}$$

ou bien

$$\phi = \frac{4\pi}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} I_{(kl)} \qquad (7)$$

(1) J. I. E. E. t. XXXII, 1903, p. 631.

(2) E. T. Z. t. XXVI, 1905, p. 1075.

Grundzüge der Beleuchtungstechnik, Berlin, 1907, p. 17 (paru également en traduction française, Paris, 1911).

ou enfin, pour $n=20$

$$\phi = \frac{2\pi}{10} \sum_{k=0}^{k=19} I_{(kl)} \qquad (8)$$

En appliquant la formule (7) respectivement pour $n=20$ et $n=10$ aux courbes hypothétiques du tableau I, on obtient les résultats résumés au tableau II. Pour chaque courbe I_m a la valeur théorique donnant un flux lumineux de 1000 lumens.

Source de lumière		Sphèr·	Demi-sphère	Plan	Cylindre
Flux lumineux en lumens	$n=20$	1000	1000	1000	1003,5
	$n=10$	1000	1000	1000	1009,7
Erreur méthodique relative en centièmes	$n=20$	0	0	0	+ 0,35
	$n=10$	0	0	0	+ 0,97

Tableau II. Résultats de l'application de la formule (7) à la détermination du flux lumineux des sources de lumière hypothétiques simples.

On remarquera que la méthode donne des résultats exacts dans le cas des trois premières sources de lumière. Ce résultat est dû au fait que dans le système de coordonnées du diagramme d'Allard, la courbe représentant l'intensité lumineuse de ses sources est linéaire. Pour le même motif ce résultat est indépendant de n. La courbe relative au cylindre lumineux est du second degré.

On voit que la précision pour $n=10$, quoique moindre que pour $n=20$, est encore tout à fait satisfaisante.

9) *Quadrature approchée par la formule des trapèzes.*

Liebenthal (1), qui dit n'avoir eu connaissance de la

(1) Praktische Photometrie, Braunschweig, 1907, p. 284.

construction de Rousseau que par le livre de Palaz (1), avait indiqué dès 1889 une courbe (2) identique à celle d'Allard. Pour la quadrature approchée il se sert de la formule des trapèzes. En divisant la base du diagramme en n parties égales, l'aire totale de ce dernier est représentée par l'expression

$$S = \frac{2r}{n}\left[\frac{I_o + I_n}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} I_k\right]$$

et le flux lumineux représenté, en vertu de la relation (6) a pour valeur

$$\phi = \frac{4\pi}{n}\left[\frac{I_o + I_n}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} I_k\right] \qquad (9)$$

Pratiquement, pour $n=20$ il vient

$$\phi = \frac{2\pi}{10}\left[\frac{I_o + I_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{k=19} I_k\right] \qquad (10)$$

En répétant à l'aide de la formule (9) les opérations que nous avons effectuées avec la formule (7), on obtient les résultats du tableau III.

Source de lumière		Sphère	Demi-sphère	Plan	Cylindre
Flux lumineux en lumens	$n=20$	1000	1000	1000	988,22
	$n=10$	1000	1000	1000	966,72
Erreur méthodique relative en centièmes	$n=20$	0	0	0	— 1,18
	$n=10$	0	0	0	— 3,33

Tableau III. Résultats de l'application de la formule (9) à la détermation du flux lumineux des sources de lumière hypothétiques simples.

(1) Traité de photométrie industrielle, Paris, 1892.

(2) E T. Z. t. X. 1889, p. 338.

La remarque faite au paragraphe précédent au sujet des trois premières sources de lumière s'applique également ici.

La précision de ce procédé semble être moins bonne que celle du précédent.

10) *Quadrature approchée par la formule de Simpson.*

Blondel (1) préconise l'emploi de la formule de Simpson. Pour l'application de celle-ci la base du diagramme est divisée en un nombre pair n suffisamment grand de parties égales. Représentant alors par I_i la somme des ordonnées de rang impair, les ordonnées extrêmes étant prises avec la moitié de leur valeur seulement, et par I_p celle des ordonnées de rang pair, la formule de Simpson donne pour l'aire du diagramme l'expression

$$S = \frac{4r}{3n}(2\,I_p + I_i)$$

En vertu de la relation (6) le flux est alors

$$\phi = \frac{8\pi}{3n}(2\,I_p + I_i) \tag{11}$$

ou, pour $n = 20$

$$\phi = \frac{2\pi}{15}(2\,I_p + I_i) \tag{12}$$

On démontre en analyse que la valeur absolue de l'erreur $\Delta\phi$ commise par l'application de cette formule, est telle que

$$\left|\Delta\phi\right| < \left|\frac{8\pi}{3n}(I_p - I_i)\right|$$

ou, pour $n=20$

$$\left|\Delta\phi\right| < \left|0{,}419\,(I_p - I_i)\right|$$

Appliquée aux mêmes courbes théoriques que précédemment cette méthode conduit aux résultats figurant au tableau IV.

---

(1) Ecl. El. t. II, 1895, p. 385.

Dans le cas de la sphère et de la demi-sphère la méthode donne une erreur identiquement nulle ; dans le cas du plan, pour $n = 10$, et en général pour n égal au double d'un nombre impair, elle cesse d'être applicable.

Source de lumière		Sphère	Demi-sphère	Plan	Cylindre
Flux lumineux en lumens	$n = 20$	1000	1000	1000	995,38
	$n = 10$	1000	1000	986,67	986,85
Erreur méthodique relative en centièmes	$n = 20$	0	0	0	— 0,46
	$n = 10$	0	0	— 13,3	— 1,32
Erreur absolue théorique maximum $\Delta\emptyset$	$n = 20$	0	0	0	14,317
	$n = 10$	0	0	26,67	40,187
Erreur relative théorique maximum en centièmes	$n = 20$	0	0	0	1,43
	$n = 10$	0	0	2,67	4,02

Tableau IV. Résultats de l'application de la formule de Simpson à la détermination du flux lumineux des sources de lumière hypothétiques simples.

11) *Evaluation directe du flux lumineux.*

Dans chacune de ces méthodes on peut se dispenser de tracer la courbe d'Allard, en remarquant que les intensités lumineuses entrant dans les expressions (7), (9) et (11) peuvent être lues directement sur la courbe polaire. Au fond ces méthodes deviennent donc alors purement analytiques.

Les termes intervenant dans la formule (7) relative à la méthode que nous appellerons celle de Russell-Bloch, sont les intensités lumineuses correspondant à des inclinaisons dont les cosinus forment une progression arithmétique, dont le terme général peut s'écrire

$$\frac{n - 2p + 1}{n} \qquad (13)$$

Dans cette expression p prend successivement toutes les valeurs entières de 1 à n. Le cas pratique le plus fréquent est celui où $n = 20$. Pour cette valeur de n la progression (13) devient

$$0{,}95 \quad 0{,}85 \quad 0{,}75 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; -0{,}85 \quad -0{,}95 \qquad (14)$$

On trouvera au tableau V les angles correspondants, qui sont les données les plus utiles au point de vue pratique.

1	18°12′	11	92°52′
2	31°47′	12	98°38′
3	41°25′	13	104°29′
4	49°28′	14	110°29′
5	56°38′	15	116°45′
6	63°15′	16	123°22′
7	69°31′	17	130°32′
8	75°31′	18	138°35′
9	81°22′	19	148°13′
10	87°8′	20	161°48′

Tableau V. Angles de Russell-Bloch.

Les intensités lumineuses à introduire dans la formule (9) ont également des cosinus en progression arithmétique, le

terme général pouvant s'écrire

$$\frac{n - 2p}{n} \qquad (15)$$

où p prend successivement toutes les valeurs entières de o à n. Pour $n=20$ les cosinus des angles étudiés prennent les valeurs suivantes

1 0,9 0,8 0,7 .... —0,9 —1 (16)

Dans le troisième cas enfin, celui de la formule de Simpson, on a affaire à deux suites de termes, auxquels correspondent des cosinus représentés par les termes généraux suivants :

$$\text{pour } I_p : \quad \frac{n - 4k - 2}{n} \qquad (17)$$

$$\text{pour } I_i : \quad \frac{n - 4k}{n} \qquad (18)$$

Dans ceux-ci k prend successivement toutes les valeurs entières

$$\text{pour } I_p \text{ de } 0 \text{ à } \frac{n-2}{2}$$

$$\text{pour } I_i \text{ de } 0 \text{ à } \frac{n}{2}$$

Pour $n=20$, les progressions (17) et (18 deviennent respectivement :

pour I_p : 0,9 0,7 0,5 ..... —0,7 —0,9 (19)

pour I_i : 1 0,8 0,6 ..... —0,8 —1 (20)

Les angles correspondants, qui sont aussi ceux déterminés par la progression (16), figurent au tableau VI en regard de leur numéro d'ordre. Il y a lieu de remarquer que ce dernier est pair pour les termes de rang impair, l'ordonnée à l'origine ayant le numéro 0.

I_i		I_p	
0	0°	1	25°51′
2	36°52′	3	45°34′
4	53°8′	5	60°
6	66°25′	7	72°33′
8	78°28′	9	84°16′
10	90°	11	95°44′
12	101°32′	13	107°27′
14	113°35′	15	120°
16	126°52′	17	134°26′
18	143°8′	19	154°9′
20	180°		

Tableau VI. Angles dont les cosinus forment les progressions arithmétiques (16), (19) et (20).

12) *Papiers spéciaux. — Rapporteur de Macbeth.*

Pour l'application de la méthode de Russell-Bloch il suffit de lire sur la courbe polaire l'intensité lumineuse dans les directions du tableau V et de multiplier leur moyenne par 0,6283, valeur numérique du coefficient $\frac{2\pi}{10}$ de l'équation (8). On trouve dans le commerce des papiers à coordonnées polaires spéciaux (1) facilitant beaucoup l'application de cette méthode, les directions du tableau V y étant tracées d'avance. Le rapporteur de Macbeth (2) en matière trans-

(1) Ill. Eng. (N. Y.). t. III, 1908/09, p. 27.
Id. t. V, 1910/11, p. 126.
E. T. Z. t. XXXV, 1914, p. 274.
(2) Ill. Eng. (N. Y.). t. III, 1908/09, p. 27.

parente, sur lequel ces angles sont également marqués, permet de lire immédiatement les intensités lumineuses correspondantes sur toute courbe polaire donnée. Les angles indiqués en pointillé dans la partie droite de la figure 8 sont ceux de Russell-Bloch.

Pour l'application des deux autres méthodes aucun papier ni rapporteur spéciaux n'existent à notre connaissance. Il serait facile d'en construire.

13) *Flux lumineux partiels. — Rapporteurs de Cravath et Lansingh.*

La méthode de Russell-Bloch s'adapte facilement à la recherche du flux lumineux dans la zone comprise entre la verticale et l'angle β (fig. 6).

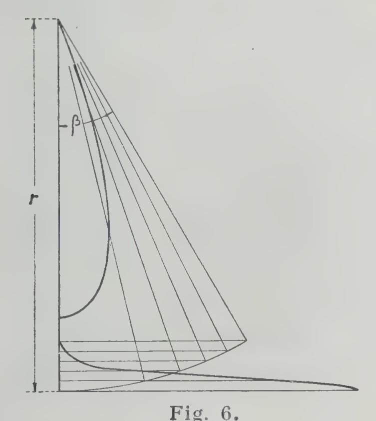


Fig. 6.

Dans ce cas l'équation (7) prend la forme

$$\emptyset_\beta = 2\pi \frac{1 - \cos\beta}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} I_{(kl)} \qquad (21)$$

Les angles sous lesquels il faut mesurer l'intensité lumineuse ont des cosinus en progression arithmétique dont le terme général s'écrit

$$1 - (2p - 1)\frac{1 - \cos\beta}{2n} \qquad (22)$$

p prenant successivement toutes les valeurs entières de 1 à n. A l'aide de ces angles Cravath et Lansing (1) ont construit des rapporteurs qu'il suffit d'appliquer sur la courbe polaire pour pouvoir faire les lectures nécessaires, comme dans le cas du rapporteur de Macbeth. La figure 7 représente

(1) T. I. E. S. t. III, 1908, p. 524.

quelques-uns de ces rapporteurs relatifs à quatre valeurs

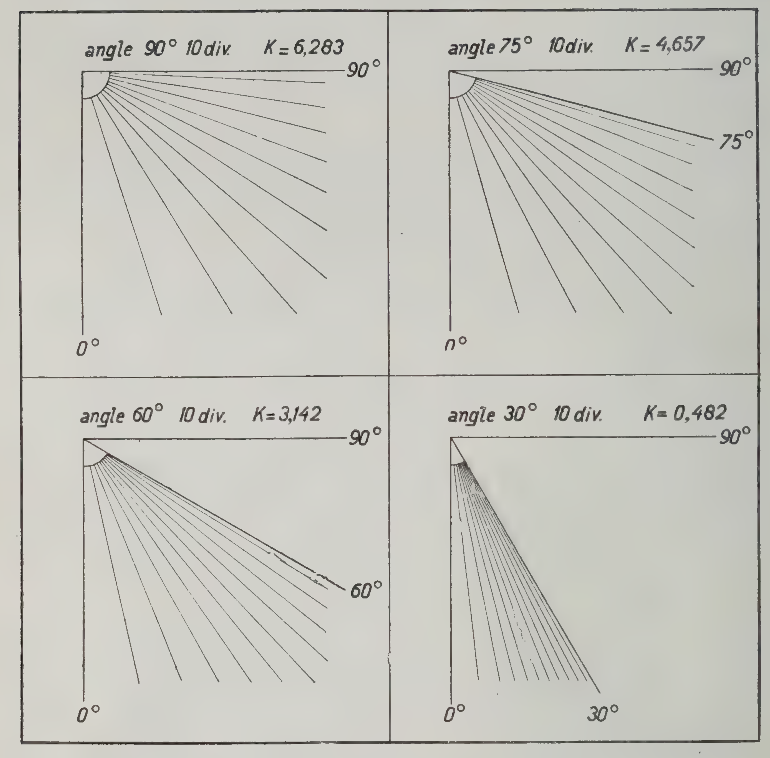


Fig. 7

de β. La valeur du coefficient

$$2\pi\,(1-\cos\beta)$$

de l'expression (21), par lequel il faut multiplier la moyenne des intensités mesurées pour obtenir le flux cherché, est également indiquée. Le nombre de divisions n a été pris égal à 10, ce qui facilite la détermination de cette moyenne.

14) *Courbe intégrale de Bloch.*

Bloch (1) a aussi proposé un autre procédé, qui permet de simplifier dans certains cas le calcul de l'éclairement moyen sur une surface déterminée, et qui consiste à tracer

(1) Grundzüge, p. 47.

la courbe intégrale du diagramme d'Allard, de sorte que la valeur du flux lumineux se lit sur ce diagramme, non plus comme une aire, mais comme la différence entre les ordonnées extrêmes correspondant à la zone considérée. Cett courbe est donc représentée par l'équation

$$\phi = 2\pi \int_o^\alpha I_\alpha dh = 2\pi \int_o^\alpha I_\alpha \sin \alpha \, d\alpha$$

Sa construction exacte exige une intégration graphique de la courbe d'Allard dans la plupart des cas.

Pratiquement cependant on peut se contenter d'une détermination du flux de chaque zone en se servant des angles de Russell-Bloch.

Dans la figure 8, on trouvera, à droite une courbe polaire ordinaire, à gauche la courbe d'Allard correspondante.

La base de cette dernière est divisée en n parties égales. Traçons les ordonnées par les points de division. Pour l'aire d'un trapèze curviligne partiel quelconque nous écrirons alors l'expression approchée

$$S_{kl} = \frac{2r}{n} I_{(kl)} .$$

D'autre part, en vertu de la relation (5) le flux représenté par cette aire peut s'écrire

$$\phi_{kl} = \frac{4\pi}{n} I_{(kl)}$$

c'est-à-dire, dans le cas présent, pour $n = 20$

$$\phi_{kl} = \frac{2\pi}{10} I_{(kl)} .$$

La courbe intégrale de Bloch se construit maintenant en portant sur l'ordonnée finale de chaque zone une longueur égale à celle portée sur l'ordonnée initiale, augmentée de $\frac{I_{(kl)}}{10}$ relatif à la zone considérée. Puis on relie tous les points ainsi obtenus, ainsi que l'origine (ordonnée « O ») par une courbe continue. Alors la différence de deux ordonnées quel-

conques mesurées à l'échelle de l'intensité, multipliée par 2π, donne, le flux lumineux rayonné dans l'angle solide cor-

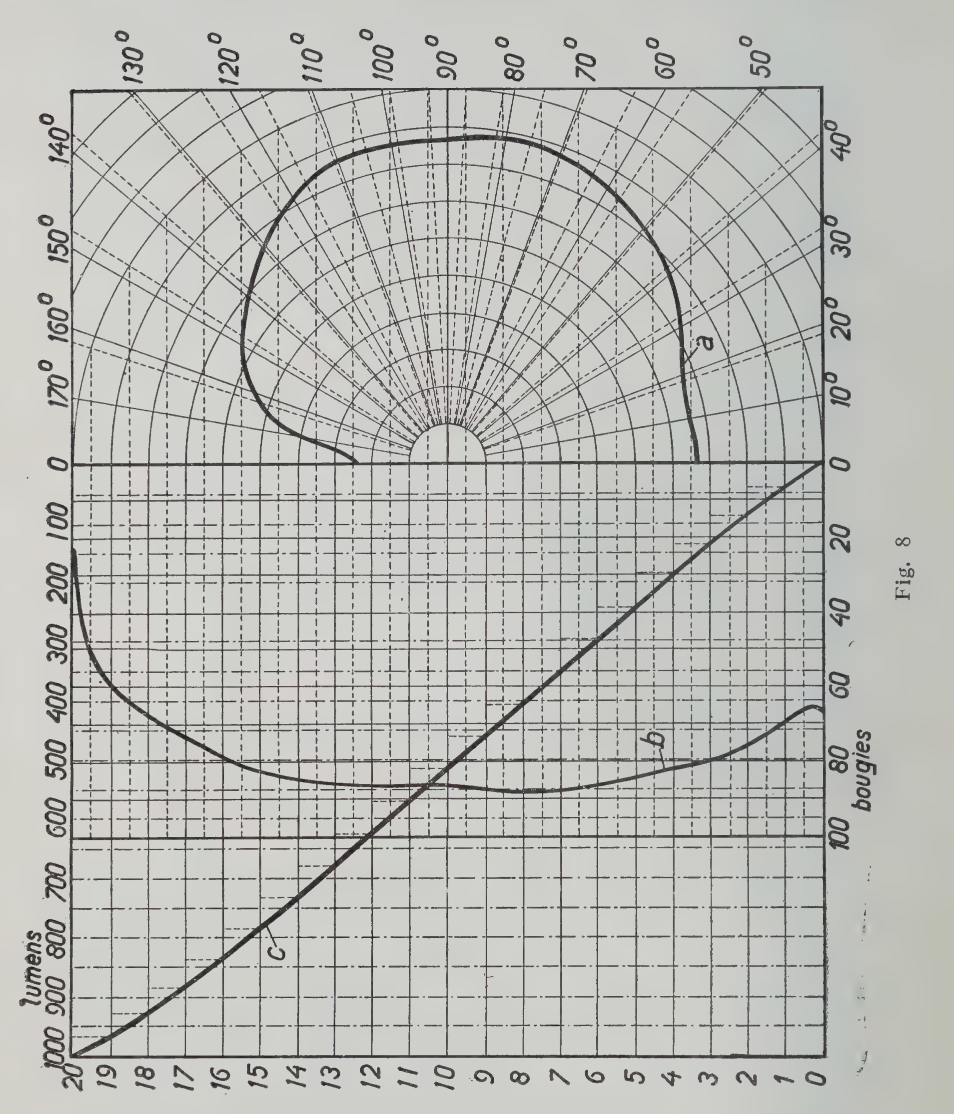


Fig. 8

respondant. Le flux total est celui qui résulte de la multiplication par 2π de la dernière ordonnée.

Si l'on convient de se servir toujours de courbes polaires

représentant un flux lumineux total de 1000 lumens, l'ordonnée finale de la courbe intégrale de Bloch aura toujours la même longueur et l'on pourra se servir de papiers préparés d'avance (fig. 8). On peut éliminer la multiplication par 2π en graduant cette dernière longueur en 1000 parties égales. L'échelle des flux est alors à celle des intensités dans le rapport de $1 : 2\pi$.

Remarquons enfin que la graduation de l'échelle des abscisses n'est pas obligatoirement sinusoïdale ; elle pourrait aussi être linéaire en α comme dans les catalogues de certains constructeurs d'appareils d'éclairage, ou même quelconque.

15) *Procédé de Kilmer.*

Pour construire la courbe d'Allard, Kilmer (1) se sert d'une feuille de papier quadrillé et d'une table de cosinus et évite ainsi le tracé de la courbe polaire. A partir d'une origine 0 il compte 100 divisions du papier quadrillé vers le haut et vers le bas, la longueur totale de 100 divisions représentant l'unité. La mesure des intensités lumineuses en vue du tracé de la courbe polaire se fait ordinairement de 10 en 10 degrés. Cherchant alors dans une table de lignes trigonométriques, la valeur des cosinus de ces angles, arrondie à deux décimales, il marque celle-ci sur l'échelle déterminée précédemment. Au droit de ces abscisses il porte alors en ordonnées les intensités correspondantes, ce qui permet de tracer la courbe d'Allard.

16) *Papier à abscisses sinusoïdales de Halbertsma.*

Cette construction est beaucoup simplifiée par l'emploi du papier spécial de Halbertsma (2), à abscisses sinusoïdales. Celui-ci dispense d'avoir recours à la table trigonométrique. Les abscisses sont marquées en angles, ce qui permet le tracé

(1) Ill. Eng. (N. Y.). t. III, 1908/09, p. 25.
(2) L. u. L. 1915, p. 301.
E. T. Z. t. XXXVII, 1916, p. 53.

immédiat de la courbe d'Allard, tandis que les ordonnées de Russel-Bloch, devant servir à faire la moyenne, sont marquées d'avance et numérotées de 1 à 20.

17) *Simplification adoptée par Liebenthal.*

Liebenthal (1) emploie aussi une modification de la courbe d'Allard qui permet de réduire de moitié la place occupée par la figure. Soit (fig. 9) ABC la courbe d'Allard ordinaire construite sur une base $2r$. Traçons alors BD symétrique de BA par rapport à OB, ordonnée du milieu. Construisons ensuite une nouvelle courbe BE,

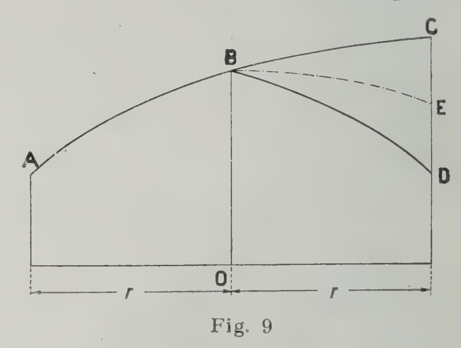


Fig. 9

dont les ordonnées I′ soient les moyennes arithmétiques de celles de BC et de BD. Alors le flux total cherché résulte de la relation

$$\phi = \frac{4\pi}{r} \int_{o}^{r} \text{I}'dr.$$

Les procédés approchés pour l'évaluation de ϕ décrits sont évidemment applicables à cette courbe moyenne.

III. — **Procédés basés sur l'emploi de zones d'ouverture constante.**

18) *Diagramme de Kennelly.*

Kennelly (2) a basé sur notre formule (3)

$$\phi_{kl} = 2\pi \text{I}_{kl}(\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

une construction graphique où ϕ_{kl} est donné par la longueur d'un segment de droite, ce qui remplace la détermination.

---

(1) E. T. Z. t. X, 1889, p. 337.
Praktische Photometrie, p. 280.
(2) T. I. E. S. t. III, 1908, p. 243.
El. W. t. LI, 1908, p. 645.

d'une aire par la mesure d'une longueur. Considérons (fig 10) a zone comprise entre les angles α_k et α_l. Par l'extrémité M

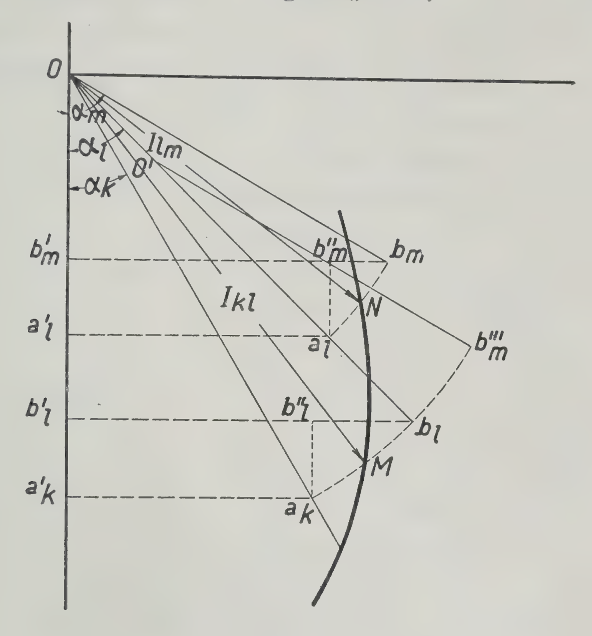


Fig. 10

du vecteur I_{kl} menons un arc de circonférence ayant O pour centre. Cet arc coupe les directions α_k et α_l aux points a_k et b_l. Projetons ceux-ci en a'_k et b'_l sur l'axe de la figure. Il est immédiatement évident que

$$a'_k b'_l = I_{kl} (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

Pour avoir le flux lumineux total représenté par la courbe polaire, il suffit donc de répéter l'opération qui vient d'être décrite pour toutes les zones dans lesquelles on a divisé la figure, et de multiplier par 2π la somme des longueurs telles que $a'_k b'_l$.

Dans l'application on peut procéder de deux manières. En premier lieu on peut projeter isolément sur l'axe de la figure tous les arcs de cercle tels que $a_k b_l$, $a_l b_m$, etc. en déterminer individuellement la longueur et faire la somme de ces

longueurs. Une variante de ce procédé est indiquée par Kuhn (1), qui projette les points a_k, a_l, etc. en b''_l, b''_m, etc. sur les horizontales menées par les extrémités des arcs de cercle dont ces premiers points sont les origines. Il fait alors la somme des segments tels que $a_k b''_l$, $a_l b''_m$, etc.

Le second procédé est celui indiqué par Kennelly lui-même. Il revient à réunir en une courbe continue $a_k b_l b''_m \ldots$ les arcs de cercle tels que $a_k b_l$, $a_l b_m$, etc. en faisant glisser les uns sur les autres les triangles curvilignes $Oa_k b_l$, $Oa_l b_m$, etc., de manière à amener l'origine des arcs de cercle, tels que a_l en coïncidence avec l'extrémité b_l de l'arc précédent Ainsi, dans la figure 10, le triangle $O\,\imath_l b_m$ a glissé sur la droite Ob_l dans la direction de O vers b_l de la quantité $a_l b_l$. Le centre O est ainsi venu en O′. On détermine facilement la position de ce dernier point, en portant sur $b_l O$, dans le sens centripède une longueur $b_l O' = I_{lm}$.

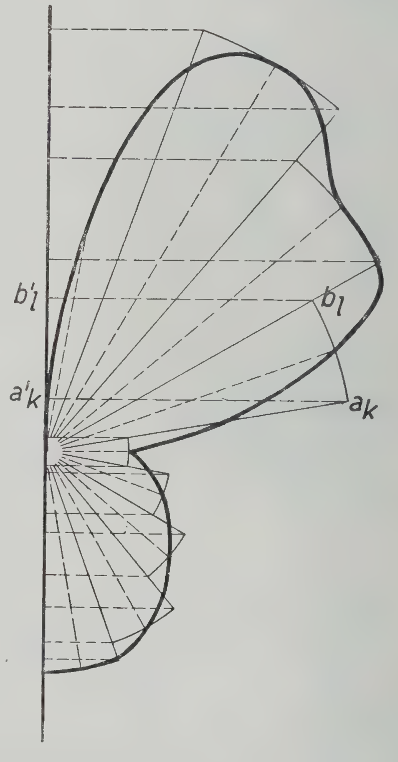


Fig. 11

Dans les figures 11 et 12, à titre d'exemple chacun des deux procédés ci-dessus a été appliqué à la même courbe polaire. Les zones y ont une ouverture de 20°. Dans les deux cas on commence par déterminer les points de la courbe tels que M, N, etc., situés sur les bissectrices des angles qui déterminent les

(1) E. u. M. t. XXXIII, 1915, pp. 500, 588 et 632.

zones. Dans le cas de la première construction (fig. 11) on trace par ces points et autour de O comme centre, des arcs de cercle jusqu'aux côtés de l'angle. On projette ensuite ces arcs de cercle sur l'axe de la figure. Enfin on fait la somme de ces projections et on multiplie celle-ci par 2π.

Dans le cas de la seconde construction (fig. 12) on ne trace qu'un seul des arcs de cercle précédents. Dans l'exemple

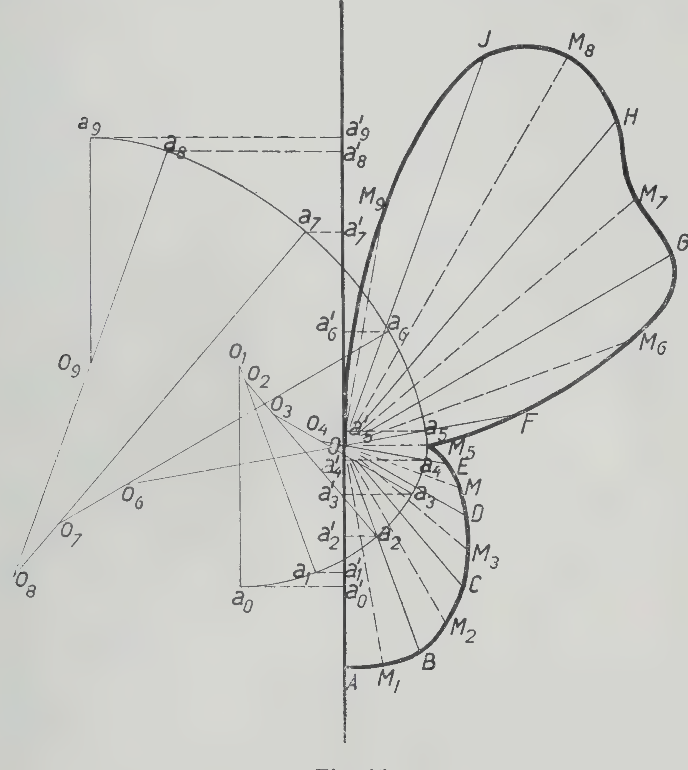


Fig. 12

de la figure 12 on a choisi pour cela la zone centrale. Cet arc de cercle, de rayon égal à OM_5 est arrêté aux points a_4 et a_5 où il rencontre les côtés de l'angle limitant la zone. Pour l'hémisphère supérieur on porte alors sur a_5O dans le sens centripède une longueur

$$a_5O_6 = OM_6.$$

Par O_6 on mène une parallèle à OG. Ensuite on trace autour de O_6 comme centre un arc de cercle a_5a_6, le point a_6 se trouvant sur la parallèle à OG que l'on vient de tracer. On détermine O_7 de la même manière que O_6 et ainsi de suite. La construction est analogue pour l'hémisphère inférieur. De cette façon on obtient une courbe continue a_0a_1..... a_9, dont la projection $a'_0a'_9$ sur l'axe de la figure donne, après multiplication par 2π, le flux lumineux total cherché.

On aura pu remarquer par cet exposé que le procédé de Kennelly est très long à effectuer, en raison des opérations graphiques nombreuses. Pour cette même raison la précision pratique du procédé diminue rapidement lorsque l'ouverture des zones est faible, c. à. d. lorsque leur nombre est grand. Lorsqu'on se contente au contraire d'un nombre de zones limité, la précision en souffre également, la formule fondamentale cessant alors d'être applicable.

19) *Papier Fluxolite.*

Notre formule (4)

$$\emptyset_{kl} = 4\pi I_{kl} \sin\frac{\alpha_l - \alpha_k}{2} \sin \alpha_{kl}$$

exprime que $\emptyset_{kl}$ est le produit de $I_{kl} \sin \alpha_{kl}$, c. à. d. (fig. 13) de la composante horizontale MN de I_{kl}, par un facteur

$$4\pi \sin\frac{\alpha_l - \alpha_k}{2}$$

dépendant uniquement de l'ouverture de la zone considérée. Si cette ouverture est la même pour toutes les zones, ce facteur devient constant. En adoptant une subdivision de 10° il prend la valeur

$$4\pi \sin 5° = 1{,}095.$$

Fig. 13

Weinbeer (1) et Sumec (2) se contentent de faire la

(1) El. Anz. t. XXVI, 1909, p. 136.
(2) E. u. M. t. XXVII, 1909, p. 319.
E. T. Z. t. XXX, 1909, p. 741.
E. u. M. t. XXXIII, 1915, p. 588.

somme des composantes horizontales des I_{kl} et de multiplier cette somme par 1,095 ou bien, ce qui pratiquement revient au même, de l'augmenter de 10 %.

Wolhauer (1) simplifie l'opération en se servant d'un papier spécial, sur lequel sont superposés un système de coordonnées polaires ordinaire et un système de coordonnées rectangulaires. Dans sa forme primitive, ce papier, dit « Papier Fluxolite », est représenté par la figure 14. L'échelle des abscisses du système de coordonnées rectangulaires est réduite dans le rapport de 1 : 1,095 relativement à celle de l'intensité lumineuse, ce qui dispense de tout calcul, à l'exception de l'addition des composantes horizontales des I_{kl} mesurées à l'échelle des coordonnées rectangulaires.

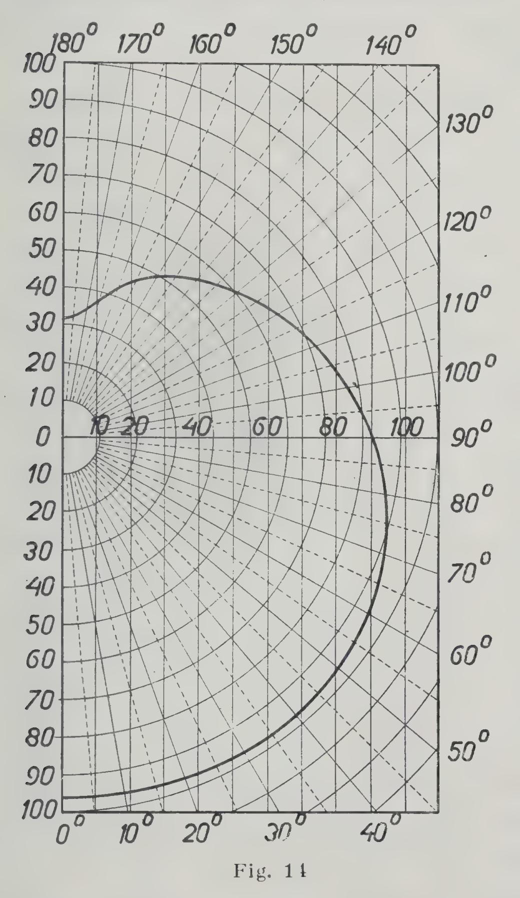


Fig. 14

Appliqué à la courbe de la figure 14, tracée pour représenter un flux lumineux total de 1000 lumens, ce procédé nous a donné la valeur de 1001 lumens.

En vertu d'une remarque faite ultérieurement par Codman

(1) Ill. Eng. (N. Y.). t. III, 1908/09, p. 655.
Ill. Eng. (Lnd). t. II, 1909, p. 673.

et Rolph (1) et sur laquelle nous reviendrons dans la suite, le papier Fluxolite sous la forme décrite est utilisable pour certaines subdivisions angulaires autres que celle que nous avons supposée. Ainsi en prenant des zones de 20° d'ouverture, la constante de réduction devient

$$4\pi \sin 10^\circ = 2{,}182$$

valeur pratiquement double de 1,095 que nous avions trouvée pour les zones de 10°. En considérant des zones de 20° d'ouverture, il suffit donc de faire la somme des composantes horizontales des I_{kl}, α étant pris successivement égal à 10°, 30°, 50°, etc. L'échelle des abscisses sera deux fois plus petite que celle représentée, c. à. d. que la droite marquée 200 sur la figure 14, sera marquée 400 dans le cas présent.

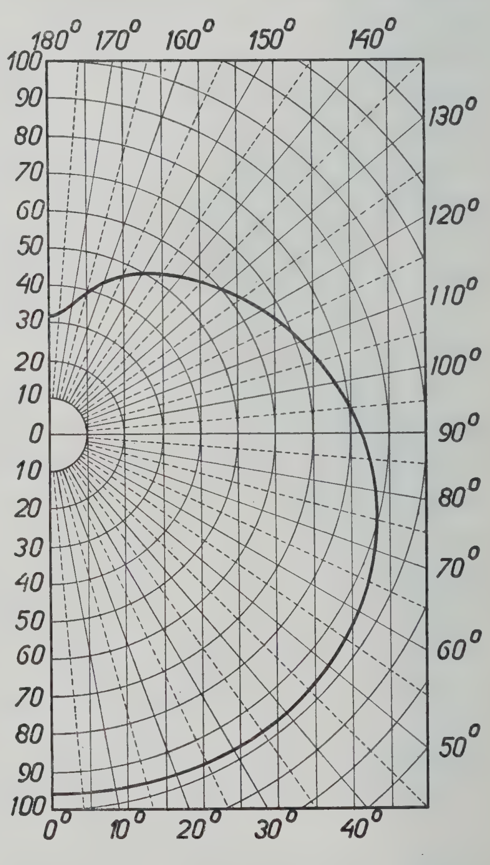


Fig. 15

On a reproché au papier Fluxolite sous cette forme de s'obscurcir considérablement, lorsque le réseau des lignes constituant les deux systèmes de coordonnées devient un peu dense. Remarquons que ce nombre a été restreint dans nos figures puisque nous n'avons en vue que l'exposition de l'emploi de ce papier et des principes sur lesquels il est basé.

On obtient un papier plus clair en renonçant à la diffé-

(1) Il. Eng. (N. Y.). t. IV, 1909/10, p. 149.

rence entre l'échelle radiale et celle des abscisses, comme dans la figure 15. C'est sous cette forme que le papier Fluxolite modifié se présente (1). En se servant de ce nouveau papier, on mesure les composantes horizontales des intensités lumineuses à la même échelle que ces intensités elles-mêmes. Leur somme est à multiplier par un coefficient dépendant de la subdivision angulaire adoptée. Ce coefficient prend les valeurs suivantes pour des zones dont l'ouverture $\Delta\alpha$ est donnée par le tableau VII.

$\Delta\alpha$	$4\pi \sin \frac{\Delta\alpha}{2}$
5°	0,5481
10°	1,0953
15°	1,6403
20°	2,1821
30°	3,2525

Tableau VII. Coefficients de correction pour le papier Fluxolite modifié.

La nouvelle forme du papier Fluxolite est donc d'un emploi beaucoup plus général que l'ancienne. Reprenant la même courbe polaire que dans le cas précédent nous avons trouvé, pour $\Delta\alpha = 10°$, la valeur de 920 pour la somme des composantes horizontales. Multipliée par 1,095 celle-ci donne 1007 lumens, valeur légèrement supérieure à la précédente. Cette différence doit évidemment être attribuée à l'inexactitude inévitable du dessin et des lectures. L'accord est d'ailleurs tout à fait satisfaisant pour la pratique.

L'adjonction de quelques rayons de directions déter-

(1) Ill. Eng. (N. Y.). t. IV, 1909/10, p. 491.

minées permet de s'affranchir de la multiplication par une constante, ainsi que nous l'avons montré (1).

En effet, en adoptant une subdivision angulaire dans laquelle l'ouverture des zones est de 9°, la constante s'approche assez près de l'unité pour que l'on puisse l'assimiler à celle-ci en première approximation. Pour $\Delta\alpha = 9°$, on a

$$4\pi \sin 4°30' = 0{,}98594$$

valeur qui ne diffère de l'unité que de 1,4 %.

Les intensités lumineuses dont il convient d'additionner les composantes horizontales, sont celles dont les directions sont tracées en pointillé dans la figure 16. La même courbe que précédemment nous a donné dans le cas présent 999 lumens, valeur tout aussi satisfaisante que les précédentes.

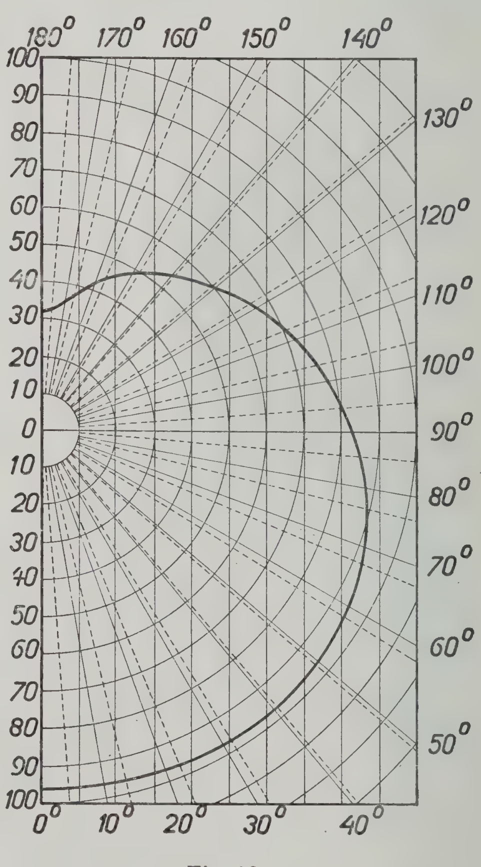


Fig. 16

La deuxième ou la troisième forme du papier Fluxolite, peuvent convenir également à l'application d'un autre procédé indiqué par Rousseau. (2)

D'après notre formule (1) on peut écrire pour le flux

(1) R. G. E. t. XXIV, 1928, p. 280.
(2) Ing. Cons. t. VI, 1883/84, p. 105.
C. R. Anv. 1885, p. 101.

lumineux total d'une source de lumière

$$\phi = 2\pi \int_o^\pi I_\alpha \sin \alpha \, d\alpha.$$

En remplaçant dans cette formule $I_\alpha \sin \alpha$ par y_α, on obtient l'expression

$$\phi = 2\pi \int_o^\pi y_\alpha d\alpha$$

qui, intégrée par la formule des trapèzes donne

$$\phi = 2\pi \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{k=n-1} y_{k \frac{180^o}{n}}$$

puisque

$$y_{o^o} = y_{180^o} = 0.$$

En posant $n = 18$, il vient finalement

$$\phi = 1{,}0966 \sum_{k=1}^{k=17} y_{k.10^o}.$$

Les points de la courbe dont il faut déterminer la distance à l'axe vertical sont donc ceux situés sur les rayons en traits continus (fig. 15 et 16).

Quoique l'ouverture des zones considérées soit de 10°, nous trouvons un coefficient 1,0966 différent de celui indiqué au tableau VII pour $\Delta\alpha = 10^o$. La raison en est que les deux procédés ne sont pas basés sur le même point de vue. Dans le procédé exposé antérieurement, chacune des distances horizontales mesurées représentait à une échelle déterminée, le flux lumineux de la zone à laquelle elle était relative, tandis que dans le cas actuel chacune de ces distances intervient dans le flux lumineux de deux zones adjacentes. Ce procédé ne se prête donc pas tel quel à la détermination du flux lumineux d'une seule zone, ou d'un groupe de zones. Pour pouvoir s'en servir dans ces deux cas, il ne faut faire intervenir les termes extrêmes que par la moitié de leur valeur mesurée.

Au fond ce procédé revient à intégrer un nouveau diagramme en coordonnées rectangulaires, ayant pour abscisse

$$x = \alpha$$

et pour ordonnée

$$y = I_\alpha \sin \alpha$$

Liebenthal (1), au bout de considérations très longues, arrive à une formule assez compliquée, qui s'identifie cependant en dernière analyse avec celle de Rousseau que nous venons d'étudier.

Comme au chapitre précédent nous appliquerons les divers procédés qui viennent d'être étudiés aux cas hypothétiques du tableau I. Rappelons qu'une même formule donnera toujours le même résultat quelle que soit la façon dont elle est interprêtée, en supposant bien entendu que l'ouverture des zones considérées est toujours la même. Ainsi le diagramme de Kennelly, le papier Fluxolite sous toutes ses formes avec coefficient de réduction, ainsi que plusieurs autres moyens de détermination du flux lumineux qui seront décrits au cours de ce chapitre, sont tous basés sur la même formule, que celle-ci soit mise sous la forme (3) ou sous la forme (4). Dans le tableau VIII, qui résume tous les résultats relatifs à ce chapitre, ces procédés sont désignés par la lettre *A*. La lettre *B* est réservée au procédé du papier Fluxolite sous sa troisième forme, la constante de réduction étant prise égale à l'unité La lettre *C* enfin se rapporte au procédé de Rousseau.

Le procédé *A* appliqué aux deux premières sources de lumière hypothétiques, la sphère et la demi-sphère, donne des résultats rigoureux, indépendamment du nombre de subdivisions. De même le procédé *C* donne toujours le flux lumineux exact dans le cas du cylindre, quel que soit n. L'égalité des deux résultats relatifs au cas du disque plan lumineux n'est due qu'à une coïncidence.

(1) Praktische Photometrie, p. 272.

Source de lumière			Sphère	Demi-Sphère	Plan	Cylindre
Flux lumineux en lumens	$\Delta\alpha = 20^{\circ}$	A	1000	1000	984,81	994,93
	$\Delta\alpha = 10^{\circ}$	A	1000	1000	1003,8	998,73
	$\Delta\alpha = 9^{\circ}$	A	1000	1000	1003,1	998,96
	$\Delta\alpha = 9^{\circ}$	B	1014,2	1014,2	1017,4	1013,2
	$n = 18$	C	997,48	997,48	989,83	1000
	$n = 9$	C	989,83	989,83	989,83	1000
Erreur méthodique relative en centièmes	$\Delta\alpha = 20^{\circ}$	A	0	0	— 1,52	— 0,51
	$\Delta\alpha = 10^{\circ}$	A	0	0	+ 0,38	— 0,13
	$\Delta\alpha = 9^{\circ}$	A	0	0	+ 0,31	— 0,10
	$\Delta\alpha = 9^{\circ}$	B	+ 1,42	+ 1,42	+ 1,74	+ 1,32
	$n = 18$	C	— 0,25	— 0,25	— 1,02	0
	$n = 9$	C	— 1,02	— 1,02	— 1,02	0

Tableau VIII. Résultats de l'application des formules basées sur l'emploi de zones d'ouverture constante à la détermination du flux lumineux des sources de lumière hypothétiques simples.

Pour le procédé A $\quad \phi = 4\pi \sin \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{k=n} I_{\alpha} \sin \alpha$

» » B $\quad \phi = \sum_{k=1}^{k=n} I_{\alpha} \sin \alpha$

avec $\alpha = (2k - 1) \frac{180^{\circ}}{2n}$ (pour A et B)

» » C $\quad \phi = \frac{2\pi^2}{n} \sum_{k=1}^{k=n-1} I_{\alpha} \sin \alpha \quad$ avec $\alpha = k \frac{180^{\circ}}{n}$

Il est évident que les résultats du procédé *B*, multipliés par la constante $4\pi \sin \Delta\alpha$ doivent reproduire ceux du procédé *A*. Lors de notre première publication relative à la troisième forme du papier Fluxolite nous avions déduit ce même procédé simplifié par une voie différente de celle que nous avons suivie maintenant. Nous avions été amené alors à faire d'autres approximations, ce qui nous avait conduit à la constante $\frac{\pi^2}{10}$ · Celle-ci ne diffère d'ailleurs que de très peu de notre coefficient actuel. En effet, ces deux coefficients ont les valeurs suivantes :

$$\frac{\pi^2}{10} = 0{,}98696$$

$$4\pi \sin 4^{\circ}30' = 0{,}98594$$

Aucun de ces coefficients n'est à préférer à l'autre pour des raisons théoriques.

20) *Procédé de Codman et Rolph. — Emploi du double décimètre.*

En se basant sur les considérations développées au sujet du papier Fluxolite, Codman et Rolph (1) ont eu l'idée d'adopter pour l'intensité lumineuse une échelle graphique telle, que $\emptyset_{kl}$ puisse se mesurer directement sur la figure, à l'aide d'un double décimètre.

Posons

$$u_{\mathrm{I}} = a \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{bg}}$$

alors

$$\overline{\mathrm{I}}_{kl} = \mathrm{I}_{kl} . a$$

Or, la longueur MN (fig. 13) qui doit représenter le flux $\emptyset_{kl}$ vaut (en centimètres) :

$$\overline{\mathrm{I}}_{kl} \sin \alpha_{kl} = \mathrm{I}_{kl} a \sin \alpha_{kl} \qquad (23)$$

En posant maintenant

$$u_{\emptyset} = b \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{lum}}$$

(1) loc. cit. p. 149.

nous pouvons écrire d'une façon générale

$$\bar{\emptyset} = \emptyset b \qquad (24)$$

et en particulier, en tenant compte des relations (4), (23) et (24) :

$$I_{kl} a \sin \alpha_{kl} = 4\pi I_{kl} \sin \alpha_{kl} \sin \frac{\alpha_l - \alpha_k}{2} \cdot b$$

c. à. d., après simplification :

$$a = 4\pi b \sin \frac{\alpha_l - \alpha_k}{2} . \qquad (25)$$

Généralement $\alpha_l - \alpha_k = 10°$, et alors (25) devient

$$a = 1{,}095\ b \qquad (26)$$

Si nous voulons que b soit un nombre entier, la graduation des rayons du papier à coordonnées polaires devra satisfaire à la condition que la subdivision fondamentale soit un multiple de 1,095 cm.

Pour fixer les idées, posons

$$b = 1 \frac{\text{cm}}{100 \text{ lum}}$$

alors, d'après (26)

$$a = 1{,}095 \frac{\text{cm}}{100 \text{ bg}}$$

Les cercles correspondant aux centaines de bougies auront donc des rayons en progression artihmétique, la raison étant de 1,095 cm.

D'autre part, lorsque b n'est pas une puissance de 10, le même papier peut encore servir. Posons en effet

$$b = 2 \frac{\text{cm}}{100 \text{ lum}}$$

par exemple, alors on voit facilement que la raison de la progression arithmétique ci-dessus devient $2 \times 1{,}095$ cm. Dans ce cas la lecture du flux lumineux au double décimètre n'est cependant plus directe, le nombre de centimètres lu devant être divisé par 2.

Enfin, pour pouvoir se servir de ce même papier, il n'est pas indispensable que l'on considère toujours des zones d'ouverture de 10° comme nous l'avons fait. Posons d'une façon générale

$$a = \mathrm{K}b$$

la valeur de K résultant de la relation (25) et dépendant donc uniquement du mode de subdivision angulaire adopté. La condition générale pour que b soit un nombre entier est que a soit un multiple de K. D'autre part, pour que le même papier à coordonnées polaires que précédemment puisse servir, il faudra qu'il existe une relation simple entre a et le nombre 1,095, c. à. d. entre K et ce nombre.

Le tableau IX donne quelques indications à ce sujet.

$\alpha_l - \alpha_k$	K	$\frac{\mathrm{K}}{1{,}095}$
5°	0,548	0,500
10°	1,095	1
15°	1,640	1,498
30°	3,252	2,970
45°	4,809	4,392
90°	8,886	8,115

Tableau IX Constantes de réduction de Colman et Rolph.

On voit ainsi que pratiquement le papier étudié convient parfaitement dans tous les cas où l'on considère des zones dont l'ouverture est de 15° ou moins, et que pour 30° l'inexactitude introduite du chef de la subdivision du papier est encore de peu d'importance.

21) *Règles graduées de Macbeth, allant avec le papier à coordonnées polaires ordinaire.*

Macbeth (1), en partant du même point de vue que Codman et Rolph a trouvé un autre moyen pour faciliter la détermination directe du flux lumineux $\varnothing_{kl}$. Supposons que l'intensité lumineuse soit représentée à une échelle telle, que 10 divisions élémentaires radiales du papier représentent a' bougies, et que le flux lumineux soit représenté à raison de b' lumens par 10 divisions élémentaires horizontales. Alors, d'après ce que nous avons vu, ces quantités sont liées par la relation

$$b' = \mathrm{K}a'.$$

Si nous adoptons la subdivision angulaire de 10°, K = 1,095 d'après le tableau IX, de sorte que cette relation devient

$$b' = 1{,}095\ a' \qquad (27)$$

Pour chaque valeur de a' on peut donc construire une règle portant une graduation en lumens, déterminée par la relation (27). Il est évident que ces règles ne pourront servir

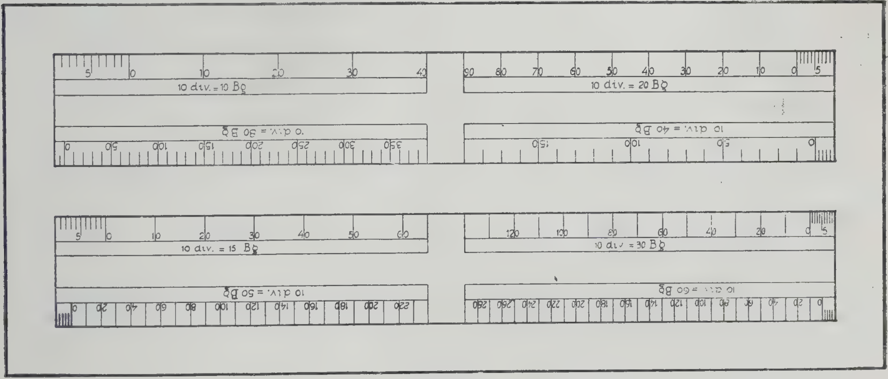


Fig. 17

qu'en combinaison avec le papier à coordonnées polaires particulier pour lequel elles ont été construites. La figure 17 représente les deux faces de la règle de Macbeth, portant au

(1) Ill. Eng. (N. Y.). t. V, 1910/11, p. 133.

total 8 échelles pour la mesure du flux lumineux, construites pour le cas où 10 divisions élémentaires du papier à coordonnées polaires de ce même auteur représentent respectivement 10, 15, 20, 30, 40, 50, 60 et 80 bougies. Elle convient également au cas où l'échelle adoptée serait la moitié ou le double de l'une quelconque de ces échelles c. à. d. que l'on peut aussi se servir de cette règle lorsque l'échelle de l'intensité lumineuse est de 5, 25, 100, 120 ou 160 bougies par 10 subdivisions élémentaires. Il faudra alors, selon le cas, diviser ou multiplier par 2 le nombre de lumens lu sur la règle.

22) *Règle à calcul de Weinbeer.*

Weinbeer a imaginé une règle à calcul permettant la détermination immédiate de $\varnothing_{kl}$ d'après notre formule (3)

$$\varnothing_{kl} = 2\pi I_{kl} (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

qui exprime que I_{kl} doit être multiplié par un coefficient proportionnel à la hauteur de la zone considérée. Le résultat de cette opération sera représenté par une longueur à déterminer sur une échelle de la règle à calcul. L'idée fondamentale de Weinbeer consiste à prendre pour chaque zone la valeur de I_{kl} sur une échelle portant toujours le même nombre de graduations, mais dont la longueur totale est proportionnelle à la hauteur de la zone considérée. Il suffit alors de faire la somme des longueurs obtenues de cette manière. Ainsi, en nous limitant d'abord à l'hémisphère inférieur, et en adoptant des zones dont l'ouverture soit uniformément de 10°, les échelles relatives aux zones successives auront des longueurs totales proportionnelles aux divisions déterminées sur la verticale OA (fig. 18) par les projections des points A, B.... K qu'un quart de cercle tracé autour de O comme centre détermine sur les rayons issus de O et formant entre eux des angles 0°

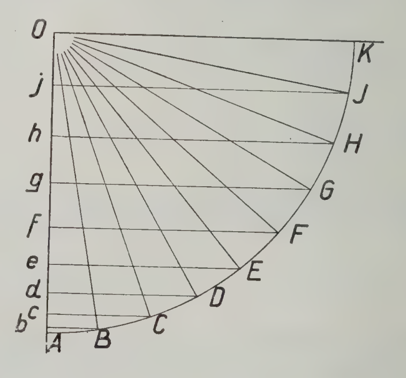


Fig. 18

Dans un premier modèle de sa règle, Weinbeer (1) emploie des réglettes mobiles séparées pour chaque zone (fig. 19 en haut). Celles-ci sont marquées de nombres représentant les directions α_{kl}, c. à. d. des bissectrices des ouvertures des zones. Les échelles portées par ces réglettes sont toutes divisées en 100 parties égales. Seule la première réglette, marquée 85, est fixe. Devant le trait $I_{85°}$ de son échelle, on amène le trait initial de la réglette marquée 75. Devant le trait $I_{75°}$ de celle-ci on amène le trait initial de la réglette suivante,

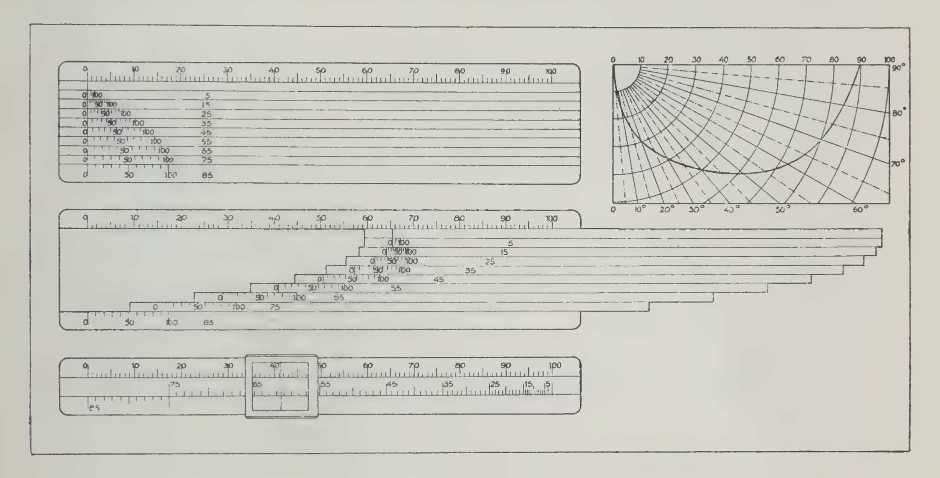


Fig. 19

et ainsi de suite. De cette manière on additionne mécaniquement une suite de longueurs proportionnelles aux ϕ_{kl} des zones successives. Cette somme se lit alors à l'échelle fixe supérieure. La quantité qu'on lit en réalité sur cette échelle est l'intensité lumineuse hémisphérique moyenne, c. à. d. le flux hémisphère divisé par 2π. Pour faire une règle donnant directement le flux lumineux hémisphérique, il faudrait donc diviser cette échelle en $2\pi \times 100$ parties égales sans en modifier la longueur totale.

A titre d'exemple l'opération complète est représentée

(1) Ill. Eng. (Lnd). t. I, 1908, p. 559.

pour la courbe polaire figurant dans l'angle supérieur droit de la figure.

Sous la forme décrite la règle de Weinbeer est d'un emploi peu pratique. Peu de temps après sa première publication, un nouveau modèle, auquel ce reproche ne s'applique plus, fut indiqué par le même auteur (1). Sous cette forme définitive la règle est représentée au bas de la même figure. Une seule réglette mobile a été substituée aux réglettes nombreuses du premier modèle. On se sert de la nouvelle règle de la manière suivante :

Devant le trait I_{85^o} de l'échelle fixe marquée 85, on amène le trait initial de l'échelle marquée 75. Sur cette dernière on repère le trait I_{75^o} à l'aide du curseur. On déplace alors la réglette de manière à amener le trait initial de l'échelle marquée 65 sous le trait du curseur. Ensuite on déplace à nouveau le curseur jusqu'au trait I_{65^o}, et ainsi de suite. La position finale du curseur donne le résultat cherché sur l'échelle fixe supérieure, c. à. d. pour la règle de la figure l'intensité lumineuse hémisphérique moyenne qu'il faut encore multiplier par 2π pour avoir le flux lumineux hémisphérique.

Pour trouver le flux lumineux total, il est donc nécessaire d'opérer en deux fois. On remarquera aussi, qu'une intensité lumineuse supérieure à l'intensité maximum pour laquelle les échelles de la règle sont prévues, amène des difficultés Cette intensité maximum est de 100 bougies pour la règle représentée par notre figure. Dans ce cas, il faudrait réduire toutes les intensités représentées par la courbe polaire dans un rapport tel que l'intensité maximum soit réduite à 100 bougies au maximum. Les opérations nécessaires étant faites, le résultat doit être multiplié par l'inverse du facteur de réduction. D'autre part, lorsque toutes les intensités

(1) El. W. t. LII, 1908, p. 1396.
El. Anz. t. XXVI, 1909, p. 216.

lumineuses sont faibles la règle manque de précision. On fera bien alors de multiplier toutes ces intensités par un même facteur, de manière à les rapprocher autant que possible de 100 bougies, sans toutefois dépasser cette dernière valeur. Le résultat obtenu est alors à réduire dans le rapport inverse.

23) *Rapporteur de Hodge et Chadbourne.*

Hodge et Chadbourne (1) ont imaginé un rapporteur basé sur notre formule (3), dont l'emploi n'exige aucune

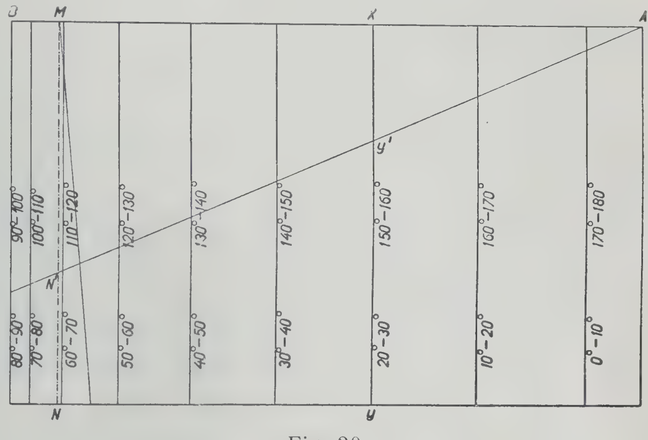


Fig. 20

opération de calcul, sauf l'addition des flux lumineux partiels ϕ_{kl}.

Dans la figure 20 des longueurs proportionnelles aux quantités

$$2\pi (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

ont été portées sur la droite AB à partir du point A. La longueur AM représente l'unité à la même échelle. Cette échelle est d'ailleurs arbitraire. Par les points de division de AB on trace des ordonnées perpendiculaires à cette droite.

Supposons que MN′ représente I_{kl}. Traçons AN′. Si la zone considérée est celle correspondant à XY, la longueur XY′

(1) T. I. E. S. t. XI, 1916, p. 22.

découpée sur cette ordonnée par AN′ représente le flux $\emptyset_{kl}$ cherché.

En effet, nous pouvons écrire

$$\frac{XY'}{MN'} = \frac{AX}{AM}$$

donc, puisque

$$\frac{AX}{AM} = 2\pi (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

$$MN' = I_{kl}$$

il en résulte immédiatement, que

$$XY' = 2\pi I_{kl} (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

Le flux est représenté à la même échelle que l'intensité lumineuse.

Pour l'emploi pratique ce rapporteur devra être imprimé sur une feuille en matière transparente et l'oblique matérialisée par une réglette opaque, pivotant autour du point A. Pour la facilité de la lecture, des droites parallèles à AB pourront également y être tracées. On se servira donc de ce rapporteur de la manière suivante :

1) Amener le point M au centre des coordonnées de la courbe polaire.

2) Amener MN dans la direction bissectrice de la zone dont on veut déterminer le flux lumineux. Si cette direction n'est pas marquée sur le diagramme, on fera coïncider la droite oblique issue de M, et qui fait angle de 5° avec MN, avec le bord extrême de la zone.

3) Faire passer le bord supérieur de la réglette mobile par l'extrémité de I_{kl}.

4) Lire $\emptyset_{kl}$ sur l'ordonnée relative à la zone étudiée, en se servant des lignes parallèles au bord supérieur du rapporteur.

Si l'on se sert toujours du même papier à coordonnées polaires, il sera commode que les parallèles tracées sur le

rapporteur le soient aux mêmes intervalles que les cercles du papier à coordonnées polaires, et numérotées comme ceux-ci.

La figure 21 montre le rapporteur ajusté sur une courbe

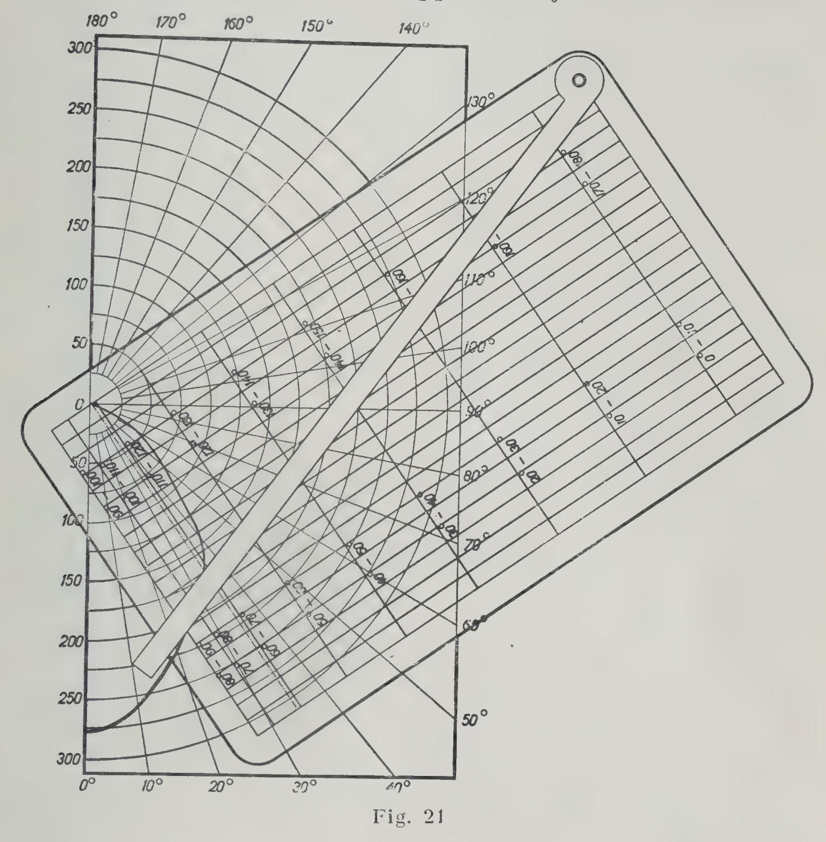


Fig. 21

polaire, dans la position pour déterminer le flux lumineux compris entre 30° et 40°.

24) *Abaque de Bull.*

Toujours en se basant sur notre formule (3) Bull (1) a construit un abaque d'un emploi facile, et qui donne de très bons résultats.

Traçons deux parallèles OA et O′A′ (fig. 22). Sur OA nous portons les valeurs de cos α_k, pour $0° \leq \alpha \leq 90°$ dans

(1) El. W. t. XCI, 1928, p. 807.

le sens de O vers A. De même, sur O′A′ nous portons à partir de O′ les valeurs de cos α_l, α_l étant compris entre les mêmes limites que α_k. Les sens positifs sur ces deux droites de support OA et O′A′ sont opposés l'un à l'autre. Nous supposerons

$$\alpha_k < \alpha_l$$

c. à. d. que

$$\cos \alpha_k > \cos \alpha_l.$$

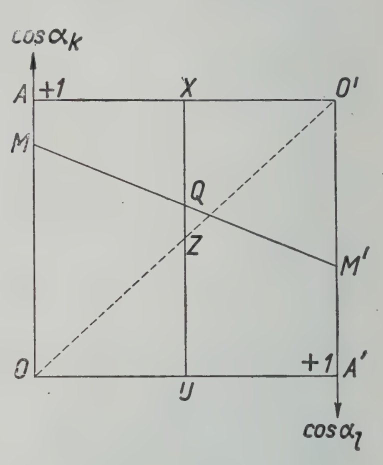


Fig. 22

Traçons maintenant XY parallèlement à OA et O′A′ et à mi-distance entre ces droites. Les points X et Y sont situés respectivement sur AO′ et OA′. Portons ensuite sur OA et O′A′ des longueurs OM et O′M′ représentant cos α_k et cos α_l à l'échelle de la figure. Joignons M à M′. La droite MM′ rencontre XY au point Q. Alors nous avons successivement

$$YQ = \frac{OM + A'M'}{2}$$

$$YQ = \frac{\cos \alpha_k + 1 - \cos \alpha_l}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos \alpha_k - \cos \alpha_l}{2}.$$

Le point Z étant pris au milieu entre X et Y, il est évident que

$$ZQ = \frac{\cos \alpha_k - \cos \alpha_l}{2}.$$

Donc en graduant OA et O′A′ en degrés (échelles A et B de la fig. 24) et ZX de 0 à 1 (échelle C de la même figure) toute droite, telle que MM′, joignant les points représentant les angles α_k et α_l pris sur OA et O′A′, rencontre ZX en un point Q, qui donne la valeur de (cos α_k — cos α_l).

Ayant cette valeur, on la multiplie par 2π en traçant par le pôle P (fig. 24) et le point Q une droite qui rencontre

l'échelle D en un point dont la graduation donne le produit 2π ($\cos \alpha_k - \cos \alpha_l$). On voit donc qu'il n'est pas nécessaire que l'échelle C soit effectivement graduée.

La dernière opération à effectuer consiste à multiplier par I_{kl} la valeur trouvée pour l'angle solide zonal, en se servant des trois échelles logarithmiques E, F et G. (fig. 24).

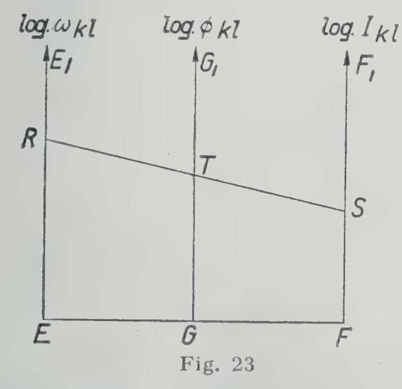


Fig. 23

Celles-ci sont établies de la façon suivante. Traçons une droite quelconque EF (fig. 23). Par les points E et F, ainsi que par le point G à distances égales de E et de F, élevons des perpendiculaires à EF. Celles passant par E et par F portent chacune une graduation logarithmique. Sur ces échelles nous portons des longueurs

$$ER = \log 2\pi (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$
$$FS = \log I_{kl}.$$

Joignons R à S. La droite RS rencontre la perpendiculaire par G au point T. Alors il est évident que

$$GT = \frac{ER + FS}{2}$$

c. à. d. que

$$GT = \frac{1}{2} \log 2\pi \, I_{kl} (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l).$$

En portant donc sur GG_1 une graduation logarithmique à une échelle qui soit la moitié de celle ayant servi à la construction des graduations sur EE_1 et FF_1 la lecture de ϕ_{kl} est immédiate.

On sait que l'origine des graduations EE_1 et FF_1 est quelconque. On la choisira de manière à pouvoir disposer des portions les plus utiles des échelles. Ainsi, sur la figure 24 on verra que la graduation de l'échelle E va de 0,05 à 6,28

stéradians (hémisphère), tandis que celle de l'échelle F s'étend de 4 à 500 bougies. Le choix des origines des échelles EE_1 et FF_1 étant fait, l'origine de l'échelle GG_1 est déterminée.

Lorsque les zones dans lesquelles on veut déterminer le flux lumineux sont situées dans l'hémisphère supérieur, il faut porter le plus grand des angles sur l'échelle A, le plus petit sur B, et continuer ensuite comme précédemment.

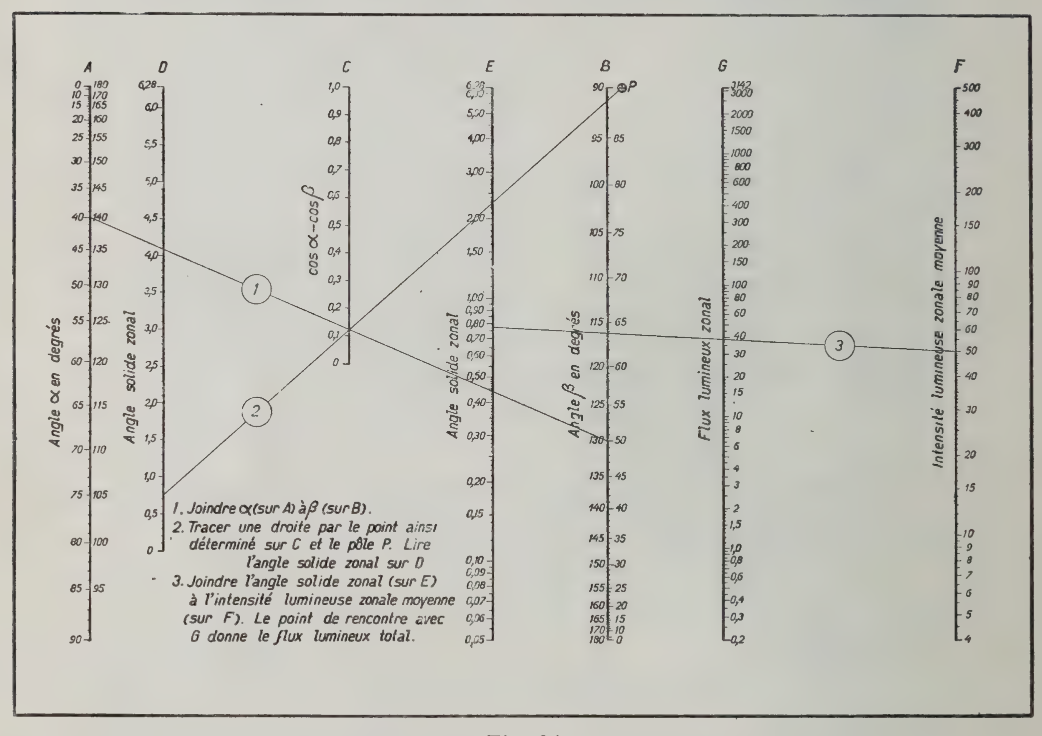


Fig. 24

Signalons encore, que l'abaque sous sa forme actuelle est inutilisable pour toute zone empiétant sur deux hémisphères, et que dans la figure 24 les angles α_k et α_l sont représentés respectivement par α et β.

Remarquons enfin que l'échelle D peut occuper une infinité de positions homothétiques par rapport au pôle P, qui, lui-même occupe une position arbitraire. En particulier

sa droite de support pourrait coïncider avec celle de l'échelle C. La graduation de cette dernière échelle n'étant pas indispensable, on pourrait donc la remplacer par la graduation homothétique de l'échelle D. Dans ce cas le point déterminé sur C par la droite joignant les points figuratifs de α_k et α_l sur les échelles A et B, déterminerait directement la quantité

$$2\pi (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

Le nombre d'opérations à effectuer pour déterminer cette dernière quantité s'en trouverait donc réduit de deux à un.

Etudions maintenant les conséquences de cette simplification pour la précision du procédé. On est en droit de se poser cette question, puisque la lecture finale se fait sur une échelle dont la longueur totale est sensiblement réduite. La précisicn globale est la résultante de deux éléments, qui sont d'une part la précision du dessin, c. à. d. dans le cas actuel celle avec laquelle on peut faire passer une drcite par deux points donnés, qui sont le pôle P et le point déterminé préalablement sur l'échelle C, d'autre part la précision de lecture, proportionnelle à la longueur de l'échelle.

En adoptant le procédé simplifié décrit ci-dessus, et étant donné le point sur l'échelle C, la précision globale se trouve donc augmentée du fait de la suppression du tracé d'une droite par deux points, en même temps que diminuée du fait de la réduction de longueur de l'échelle D. En résumé on peut dire que la simplification du procédé n'a pas eu lieu aux dépens de sa précision.

IV. — **Diagrammes polaires.**

25) *Courbe intégrale de Macbeth.*

Comme il n'a pas de sens de parler du flux lumineux rayonné dans une direction déterminée, il est impossible de construire une courbe polaire dont les rayons-vecteurs repré-

sentent par leur longueur le flux lumineux rayonné dans leur direction.

Macbeth (1) a essayé de tourner cette difficulté en traçant une courbe-intégrale telle, que dans chaque hémisphère un rayon-vecteur dans une direction quelconque représente le flux lumineux total rayonné dans l'angle solide de révolution compris entre la verticale descendante ou ascendante

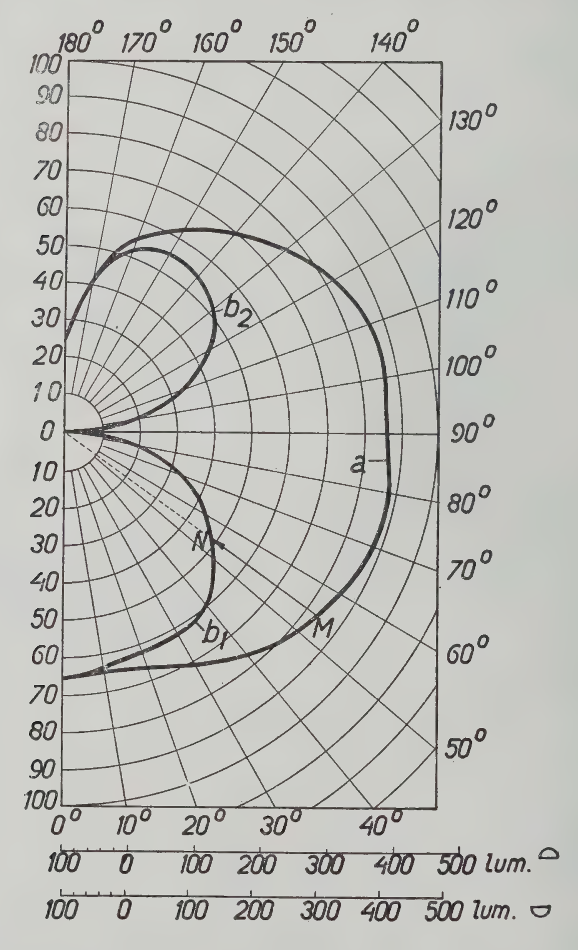


Fig. 25

(1) Ill. Eng. (N. Y.). t. III, 1908/09, p. 214.

et la direction du vecteur considéré. Les vecteurs dans la direction verticale sont donc toujours nuls, tandis que ceux dirigés suivant l'horizontale sont toujours maxima.

Au lieu de porter des vecteurs centrifuges, comme on le fait habituellement, Macbeth porte des vecteurs centripèdes à partir de la courbe polaire ordinaire.

Ainsi, soit (fig. 25) a la courbe polaire donnée, pour laquelle on veut représenter la répartition du flux lumineux. Alors le flux lumineux émis à l'intérieur du cône dont la génératrice est OM, est représenté par le vecteur MN. La courbe b_1 n'est donc autre qu'une courbe intégrale, dont l'échelle a été déterminée de manière telle que pour $\alpha = 90^o$, la courbe passe par l'origine des coordonnées. Il en est de même de la courbe b_2 pour l'hémisphère supérieur. D'une façon générale les échelles des courbes b_1 et b_2 seront donc différentes, ce qui constitue le principal inconvénient du procédé. D'autre part, si l'intensité lumineuse horizontale est nulle ou faible, la construction devient impossible ou perd sa valeur pratique.

Remarquons que le tracé de la courbe suppose que le flux lumineux pour les divers angles a été déterminé au préalable par un autre procédé.

26) *Diagrammes de Pierce.*

Pour résoudre le problème posé, Pierce (1) propose une courbe telle que la longueur du rayon-vecteur dans la direction α soit proportionnelle au flux lumineux rayonné dans un angle solide compris entre deux surfaces coniques dont les demi-angles aux sommets sont respectivement $\alpha - \varepsilon$ et $\alpha + \varepsilon$. De cette façon il obtient une courbe sans signification physique précise et ainsi qu'il le constate lui-même, sans que l'aire comprise entre deux rayons-vecteurs quelconques et l'arc qu'ils découpent sur la courbe, soit proportionnelle

(1) Z. f. Bel. t. XX, 1914, p. 189.
El. W. t. LXV, 1915, p. 297.

au flux lumineux rayonné dans l'angle solide correspondant. Aussi propose-t-il immédiatement une seconde courbe, dont le rayon vecteur « soit proportionnel à la racine carrée de la quantité représentée » qui est l'intensité lumineuse dans la direction considérée. Aucune autre précision n'est donnée et l'auteur affirme, à tort, que ce nouveau diagramme satisfait à la condition de proportionnalité des aires et des flux.

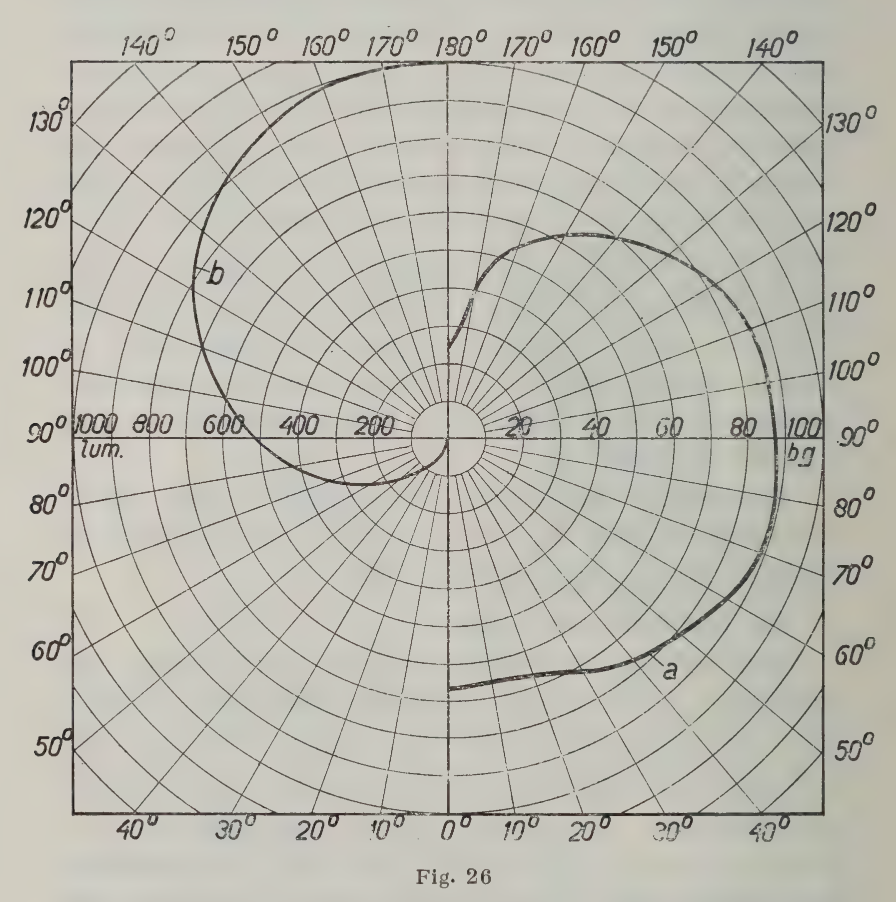


Fig. 26

Il n'est pas étonnant dès lors que ce diagramme n'ait apporté aucun progrès au problème de la représentation rationnelle des flux.

Enfin il signale une troisième possibilité, en portant

dans chaque direction un rayon-vecteur représentant par sa longueur le flux lumineux total rayonné dans l'angle solide de révolution compris entre la verticale descendante et la direction considérée. C'est donc une courbe intégrale ne présentant pas les défauts de celle de Macbeth. Toutefois, sa construction suppose également la détermination préalable des flux lumineux relatifs aux divers angles. Cette courbe une fois tracée, on détermine le flux lumineux dans une zone quelconque en faisant la différence des rayons-vecteurs relatifs aux directions limitant la zone. La figure 26 représente à gauche la courbe intégrale de Pierce relative à la courbe d'intensité figurée à droite.

En somme cette courbe intégrale ne se distingue de celle de Bloch que par le système de coordonnées employé.

27) *Figure spatiale de Russell.*

Imaginons le solide photométrique d'une source lumineuse. Russell (1) suppose celui-ci de forme quelconque. De la source de lumière sont issues des droites se dirigeant vers tous les points de la surface du solide photométrique. Autour de chacune de ces droites isolons un angle solide élémentaire $d\omega$. Le flux lumineux élémentaire contenu dans chaque $d\omega$ a pour valeur

$$d\emptyset = \mathrm{I} d\omega. \qquad (28)$$

Construisons une nouvelle surface, dont le rayon-vecteur ρ soit donné par la relation

$$\rho^3 = \mathrm{I}. \qquad (29)$$

En éliminant I entre (28) et (29) il vient

$$d\emptyset = \rho^3 d\omega = 3d\mathrm{V} \qquad (30)$$

en appelant $d\mathrm{V}$ le volume polaire élémentaire du nouveau solide.

En résumé, en portant dans chaque direction de l'espace

(1) loc. cit. p. 638.

une longueur proportionnelle à la racine cubique de l'intensité lumineuse dans cette même direction on obtient un solide représentant par son volume le flux lumineux total et sa répartition spatiale.

Sous cette forme générale cette propriété est pratiquement inutilisable pour la détermination du flux lumineux. Lorsque le solide photométrique est de révolution, cette forme se simplifie suffisamment, pour que l'on puisse y baser un procédé n'exigeant que des opérations dans le plan.

Soit à déterminer le flux lumineux d'une source de lumière dont OBA (fig. 27) est la courbe polaire. Construisons une nouvelle courbe Oba dont les rayons-vecteurs soient égaux à la racine cubique de ceux de la courbe polaire. Soit P le centre de gravité de la figure Oba et x sa distance à l'axe OA. Alors en appelant S l'aire Oba, d'après un théorème de Guldin, le volume V engendré par la rotation de Oba autour de OA, est donné par l'expression

$$V = 2\pi x \, S. \qquad (31)$$

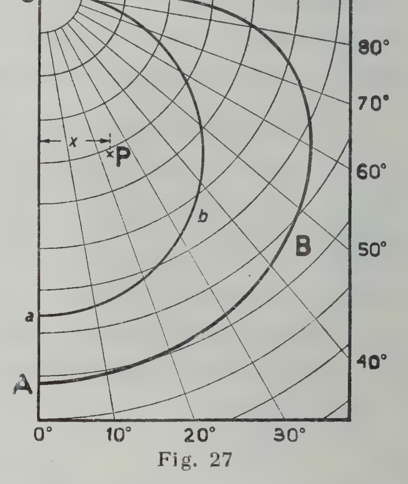


Fig. 27

Enfin, le flux lumineux cherché, aura pour valeur, d'après (30) et (31)

$$\emptyset = 6\pi x \, S.$$

Les inconvénients de cette méthode sont manifestes : le tracé de la courbe Oba, dont il faut déterminer les points par le calcul, et la détermination d'un centre de gravité s'opposent à son application pratique. D'autre part, les ordres de grandeur d'un nombre et de sa racine cubique sont en général trop différents pour qu'il soit possible de repré-

senter utilement ces deux grandeurs dans une même figure, à moins d'adopter des échelles différentes, ce qui constitue une nouvelle complication.

28) *Diagramme de Gerhardt.*

Une solution exacte du problème est donnée par le diagramme de Gerhardt (1). Soit (fig. 28) I un arc de la courbe polaire ordinaire. De même, soit F un arc de la courbe cherchée, telle que l'aire $d\Sigma$ comprise entre deux rayons-vecteurs de directions η et $\eta + d\eta$ et l'arc qu'ils découpent sur cette courbe soit proportionnelle au flux rayonné dans l'angle solide correspondant à $d\alpha$. Nous supposons cette courbe, relative à l'espace entier, située à gauche de l'axe du diagramme.

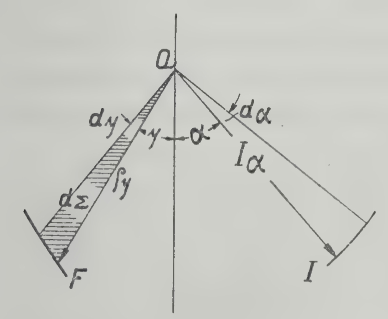


Fig. 28

L'intensité lumineuse dans la direction α étant $I\alpha$, le flux lumineux rayonné dans l'angle solide élémentaire correspondant à $d\alpha$ est d'après notre formule (1)

$$d\phi = 2\pi \, I_\alpha \sin \alpha \, d\alpha$$

D'autre part l'aire élémentaire $d\Sigma$ a pour expression

$$d\Sigma = \tfrac{1}{2} \rho_\eta^2 \, d\eta$$

où ρ_η représente le rayon-vecteur de la courbe.

En égalant cette expression à la précédente, nous obtenons

$$2\pi I_\alpha \sin \alpha \, d\alpha = \tfrac{1}{2} \rho_\eta^2 \, d\eta \qquad (32)$$

qui est l'équation de la courbe cherchée. L'équation (32)

---

1) Z. f. Bel. t. XXIV, 1918, p. 54.
E. u. M. t. XXXVI, 1918, p. 359.
J. f. G. u. W. t. LXI, 1918, p. 361.
E. T. Z. t. XL, 1919, p. 92.

est satisfaite pour

$$\left\{ \begin{array}{l} d\eta = \frac{\pi}{2} \sin \alpha \, d\alpha \\ \frac{1}{2} \rho_\eta^2 = 4 \ I_\alpha \end{array} \right. \tag{33}$$

ou bien

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{\pi}{2} (1 - \cos \alpha) \\ \rho_\eta = \sqrt{8 I_\alpha} \end{array} \right. \tag{34}$$

Les expressions (34), où η est exprimé en radians, démontrent qu'on obtient une courbe satisfaisant aux conditions de l'énoncé en portant des rayons vecteurs proportionnels

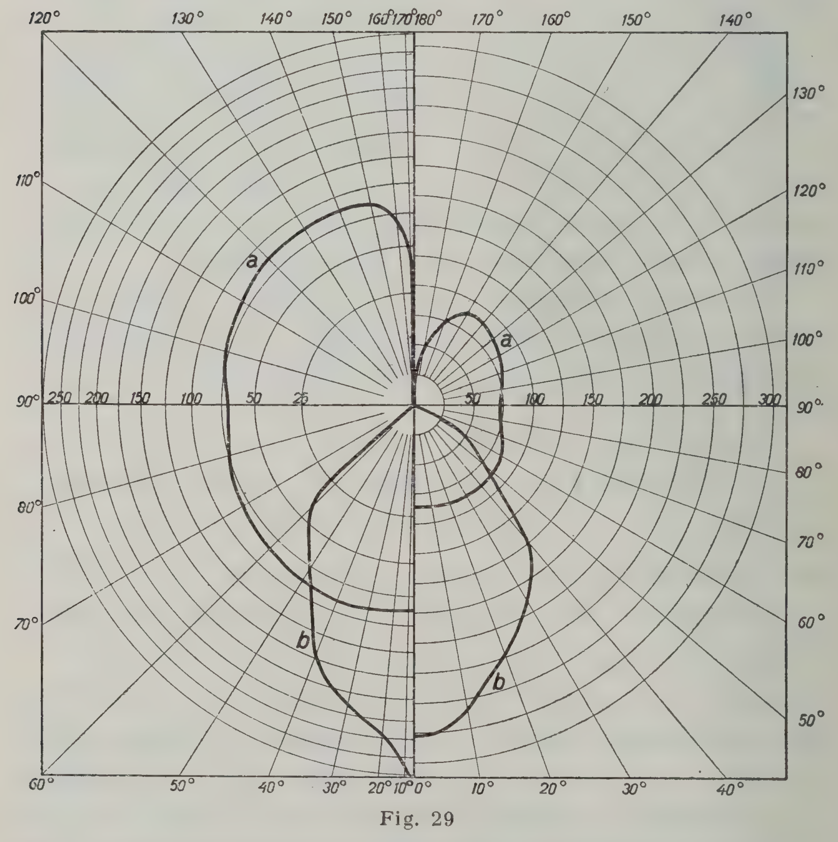


Fig. 29

aux racines carrées des intensités lumineuses I_α dans les directions faisant avec la verticale OA des angles η fonctions

de l'angle α. D'autre part, la première des expressions (33) montre que $d\eta$ est proportionnel à l'angle solide correspondant à $d\alpha$; il en résulte que l'angle plan η à son tour est proportionnel à l'angle solide déterminé par α.

En résumé on obtient donc le diagramme cherché en portant dans un réseau tel que celui de la partie gauche de la figure 29, les valeurs des intensités lumineuses figurées à droite. Les courbes *a* et *b* de cette figure se rapportent respectivement à une lampe nue et à cette même lampe placée dans un réflecteur industriel du type profond. La courbe obtenue planimétrée, donne le flux total de la source considérée et sa répartition dans l'espace. Toutefois, l'image obtenue de cette répartition parle peu à l'esprit, les directions étant altérées du fait de la déformation des angles. Celle-ci et la graduation radiale non linéaire constituent de véritables inconvénients de la méthode, surtout au point de vue graphique. C'est probablement la raison pour laquelle ce diagramme n'a pas trouvé son chemin dans la pratique.

Echelles.

Par des calculs simples on peut établir que si dans le diagramme de Gerhardt l'échelle radiale adoptée est

$$u_\rho = a \frac{\text{cm}}{\sqrt{\text{bg}}}$$

l'échelle du flux lumineux qui en résulte est donnée par la relation

$$u_\varnothing = a^2 \frac{\text{cm}^2}{\text{lumen}}$$

29) *Diagramme de Dispenza et de Matthews.*

Les diagrammes polaires précédents présentent à des degrés divers le défaut de ne pas représenter explicitement la répartition du flux lumineux.

Une solution qui échappe à ce reproche peut être obtenue de la façon suivante (1) :

On sait que le flux lumineux rayonné dans l'angle solide élémentaire $d\omega$ correspondant à $d\alpha$, est donné par l'expression (1) :

$$d\emptyset = 2\pi I_{\alpha} \sin \alpha \, d\alpha.$$

Cherchons maintenant une courbe polaire de rayon-vecteur ρ, telle que l'aire élémentaire comprise entre les directions limitant l'angle $d\alpha$ et l'arc que celles-ci découpent sur

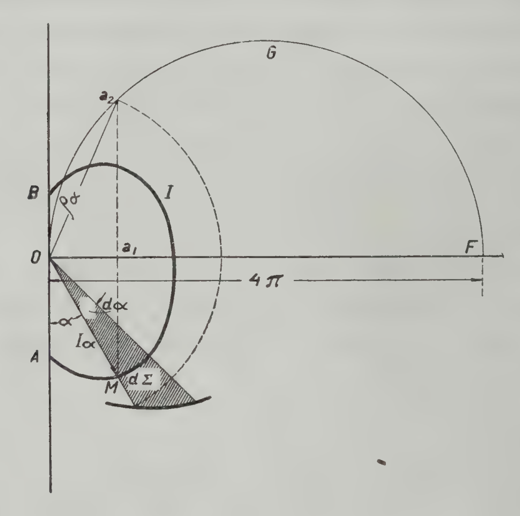


Fig. 30

cette courbe soit proportionnelle à ce flux lumineux élémentaire (fig. 30).

Cette aire polaire est donnée par l'expression :

$$d\Sigma = \tfrac{1}{2} \rho^2 \, d\alpha.$$

En égalant cette expression à celle du flux $d\emptyset$ on obtient l'équation de la courbe cherchée

$$\tfrac{1}{2} \rho^2 \, d\alpha = 2\pi \, I_{\alpha} \sin \alpha \, d\alpha$$

(1) Rass. Tecn. 1 12, fasc. V.
Elet. t. VI, 1919, p. 171.
R. G. E. t. XXIV, 1928, p. 277.

ou bien

$$\rho^2 = 4\pi I_\alpha \sin \alpha \qquad (35)$$

Russell (1) applique cette formule en déterminant par le calcul la valeur de $\sqrt{I_\alpha \sin \alpha}$, c. à. d. de la racine carrée de la composante horizontale de I_α. Ce procédé manque de rapidité.

Nous baserons sur la formule (35) une construction graphique, en remarquant que ρ est moyen proportionnel entre une longueur constante 4π et la projection de I_α sur l'horizontale. Portons sur l'horizontale, une longueur OF, représentant la longueur 4π à une échelle telle que

$$OF \geq (I_\alpha \sin \alpha)_{max}$$

Pour trouver alors la longueur du vecteur ρ à porter dans la direction α il suffit de projeter le point M de la courbe des I en a_2 sur la demi-circonférence OGF construite sur OF comme diamètre. La longueur cherchée résulte alors de la relation

$$Oa_2^2 = OF . Oa_1$$

c. à. d. que

$$Oa_2^2 = 4\pi I_\alpha \sin \alpha = \rho^2$$

d'où

$$Oa_2 = \rho$$

Suivant la verticale ρ est toujours nul, ainsi que le calcul ou la construction le montrent immédiatement. Physiquement ce fait signifie qu'à un même $d\alpha$ correspondent des angles solides de plus en plus petits lorsque α diminue, pour s'annuler en même temps que cette dernière grandeur. Il est évident que quelle que soit la valeur de I suivant la verticale, le flux lumineux dans un angle solide tendant vers zéro, tend lui-même vers zéro.

Dans la partie gauche de la figure 31 la nouvelle construction a été appliquée aux courbes de la figure 29.

---

(1) loc. cit. p. 642.

Remarques.

a) Nous avions publié la construction qui précède dans l'ignorance qu'elle l'avait déjà été antérieurement par Dispenza. Pour cette raison nous n'avions fait aucune allusion à la priorité de ce dernier auteur, que le hasard ne nous a révélée que tout récemment (1). Les publications étrangères

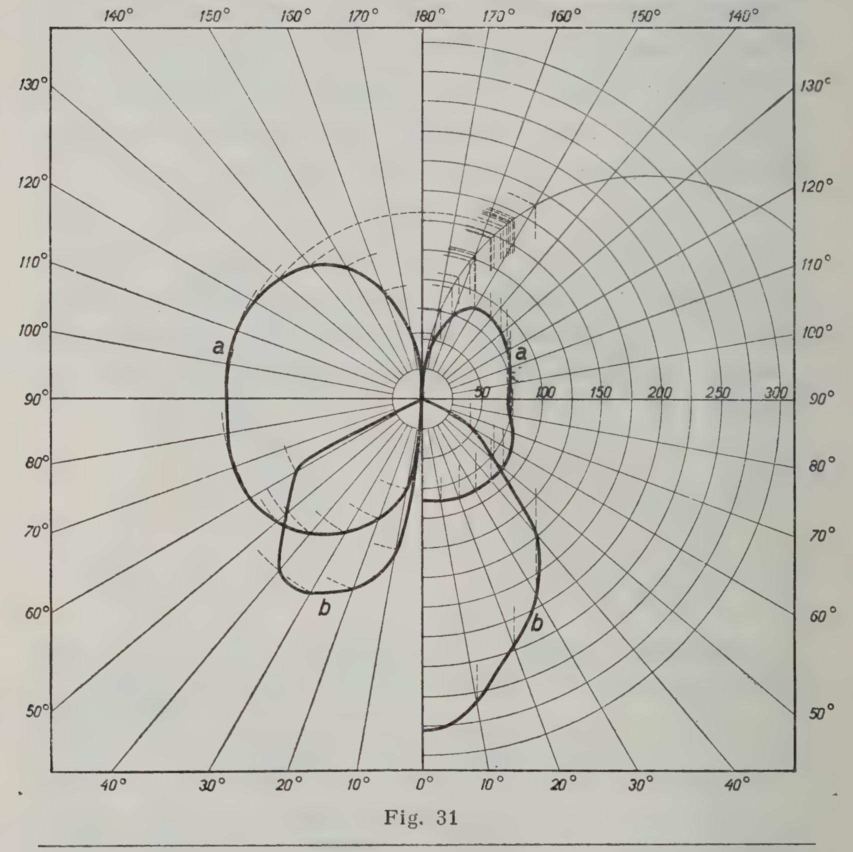


Fig. 31

(1) Nous avons été mis sur la trace de cette priorité par l'article déjà cité de cet auteur dans Elet. t. VI, 1919, p. 171, dont nous avions trouvé le résumé dans R. G. E t. V, 1919, p. 153 D. Dans cet article il était fait allusion à la construction en question, que l'auteur y dit avoir publiée ailleurs. Sur notre demande M. l'ingénieur R. Dispenza a bien voulu nous faire tenir un tiré à part de son étude originale, qui avait paru dans la revue « Rassegna Tecnica » publiée à Messine (Italie) à cette époque, mais ayant cessé de paraître depuis longtemps. Nous tenons à remercier ic' bien sincèrement notre collègue italien de son amabilité.

ayant paru pendant ou immédiatement après la guerre, manquent dans beaucoup de bibliothèques et sont par conséquent difficiles à trouver. Au moment de la publication de notre construction nous avions donc toutes les raisons de croire celle-ci inédite, d'autant plus que toutes les compétences en la matière consultées par nous, partageaient notre avis.

b) Le rayon-vecteur moyen R ne représente pas l'intensité moyenne sphérique, car

$$I_o = \frac{\varnothing_{tot}}{4\pi} = \frac{\Sigma}{4\pi}$$

et d'autre part

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}\,\pi R^2$$

d'où, en éliminant Σ entre ces deux relations

$$4\pi\, I_o = \tfrac{1}{2}\,\pi\, R^2$$

ou bien

$$I_o = \frac{R^2}{8}$$

Echelles.

Les échelles de l'intensité lumineuse et du nombre π étant respectivement

$$u_I = a\,\frac{\text{cm}}{\text{bg}}$$

$$u_\pi = b\,\frac{\text{cm}}{\text{unité}}$$

on en déduit facilement celles de la quantité ρ et du flux lumineux. On trouve

$$u_\rho = \sqrt{ab}\,\frac{\text{cm}}{\text{bg}}$$

$$u_\varnothing = ab\,\frac{\text{cm}^2}{\text{lumen}}$$

V. — Méthodes basées sur l'emploi d'un nombre restreint d'observations.

30) *Méthode des inclinaisons caractéristiques.*

L'intensité lumineuse moyenne sphérique d'une source de lumière est évidemment comprise entre son intensité maximum et son intensité minimum. Comme d'autre part la courbe polaire moyenne ne présente pas de discontinuité, il y a nécessairement au moins une inclinaison pour laquelle l'intensité moyenne I_α est égale à l'intensité moyenne sphérique I_o. Nous nous proposons dans le présent paragraphe de rechercher ces inclinaisons, que nous désignerons dans la suite sous le nom d'inclinaisons ou d'angles caractéristiques. On se rend facilement compte de la portée de ce problème. En effet, ces angles une fois connus et fixés par une règle générale, valable pour tous les cas pouvant se présenter, il suffirait de mesurer l'intensité moyenne pour une seule de ces inclinaisons, pour connaître immédiatement l'intensité lumineuse moyenne sphérique et partant le flux lumineux total.

Nous supposerons des sources de lumière filiformes, d'épaisseur négligeable et rayonnant suivant la loi du cosinus. Ces hypothèses se justifient parfaitement pour servir de base au problème que nous nous sommes posé. Il est vrai que la loi du cosinus n'est pas rigoureusement applicable aux filaments incandescents de nos lampes, mais elle ne s'écarte qu' assez peu de la réalité. En effet, elle n'est en défaut que pour les rayons lumineux émis dans des directions voisines du plan tangent à la surface rayonnante (1). Or, la quantité totale de lumière émise dans ces directions est trop faible pour apporter une perturbation sérieuse aux résultats que nous trouverons.

Nous commencerons par étudier d'abord ce problème au point de vue purement théorique en considérant un

(1) Zwikker, K. Ac. W. t. XXXVI, 1927, p. 856.

élément de filament dl (fig. 32) faisant un angle γ quelconque avec l'axe de photométrie Oz et rayonnant un flux lumineux ϕ' par unité de longueur. Nous chercherons à déterminer pour toutes les inclinaisons de dl, c. à d. pour toutes les valeurs de l'angle γ comprises entre 0° et 90°, la courbe polaire moyenne de l'intensité lumineuse de cet élément de droite. Formons un système de coordonnées rectangulaire, au centre O duquel se trouve la source lumineuse élémentaire et dont l'axe Oz coïncide avec l'axe de photométrie. L'axe Ox sera pris perpendiculaire à Oz et dans le même plan que dl. L'axe Oy enfin sera perpendiculaire aux deux axes ainsi déterminés. Considérons une direction OM quelconque, inclinée d'un angle α sur Oz et dont l'azimuth par rapport au plan Oxz sera représenté par β. Cette direction fait d'autre part un angle δ avec dl. Nous savons que le solide photométrique est représenté alors par l'équation

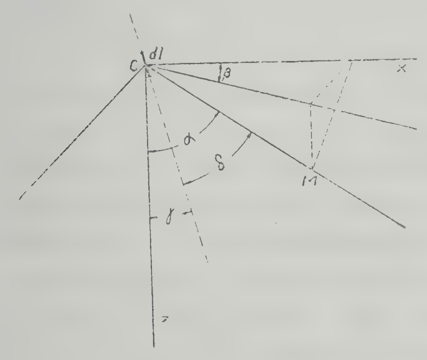


Fig. 32

$$dI = dI_m \sin \delta \qquad (36)$$

où dI_m est l'intensité lumineuse dans une direction perpendiculaire à dl, déterminée par la condition

$$d\phi = \phi' dl = \pi^2 \, dI_m.$$

Pour rapporter le solide photométrique au système de coor données que nous avons défini, il faudra éliminer δ de l'équation (36), c. à d. qu'il faudra l'exprimer en fonction de α, β et γ. Sans que nous ayons à reproduire ici les calculs, on trouve facilement que

$$\sin \delta = \sqrt{1 - (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta)^2}.$$

Ce radical est essentiellement positif, puisque δ est un angle

du premier ou du second quadrant. L'équation (36) se transforme donc en

$$dI = dI_m \sqrt{1 - (\cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma \cos\beta)^2}$$

Cette nouvelle équation nous permet d'écrire la valeur moyenne de l'intensité lumineuse pour l'inclinaison α :

$$dI_\alpha = \frac{dI_m}{\pi} \int_o^\pi \sqrt{1 - (\cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma \cos\beta)^2}\,.\,d\beta \qquad (37)$$

Remarquons dès maintenant qu'en raison de la symétrie du solide photométrique que nous considérons, par rapport au centre des coordonnées, tout plan passant par ce point divise ce solide photométrique en deux parties superposables. Il en résulte que s'il existe un angle caractéristique dans un hémisphère, il en existe nécessairement un autre, symétrique du premier par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de photométrie, quelle que soit d'ailleurs l'inclinaison de l'élément de droite lumineuse par rapport à cet axe. Dans le cas d'un système composé d'éléments présentant toutes les inclinaisons sans en privilégier aucune, c. à d. en première approximation, dans le cas d'un filament de forme quelconque, toute courbe polaire moyenne sera symétrique par rapport à l'horizontale. Lorsque dans la suite nous parlerons d'un angle caractéristique, nous sous-entendrons toujours implicitement l'existence de son conjugué.

Au lieu d'essayer de résoudre analytiquement l'intégrale elliptique définie de l'équation (37), Zickler (1) a recours à un procédé graphique consistant à construire la valeur du radical comme l'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypothénuse est prise égale à l'unité. Les valeurs de α et de γ étant données, cette construction doit être répétée pour un nombre plus ou moins grand de valeurs de β. En possession d'une série de valeurs du radical, on peut représenter

(1) E. u. M. t. XXXIII, 1915, p. 483.

celui-ci par une courbe en fonction de β. Cette courbe planimétrée donne enfin la valeur de l'intégrale cherchée. On voit combien ce procédé est long à effectuer et c'est ce qui le rend impraticable dès qu'on cherche à s'en servir pour déterminer le réseau de courbes polaires moyennes complètes pour plusieurs valeurs de l'inclinaison γ de la droite lumineuse sur l'axe de photométrie, puisqu'il y a autant de courbes à construire et à planimétrer qu'il y a de couples de valeurs de α et de γ à considérer. Zickler lui-même ne l'a appliqué que dans l'hypothèse d'un angle α empirique constant, à savoir $\alpha = 54^o$, sur lequel nous aurons l'occasion de revenir. Ce calcul lui a fourni une courbe donnant

$$\frac{dI_\alpha}{dI_m} = \frac{1}{k}$$

en fonction de γ (fig. 33). La deuxième courbe de la même

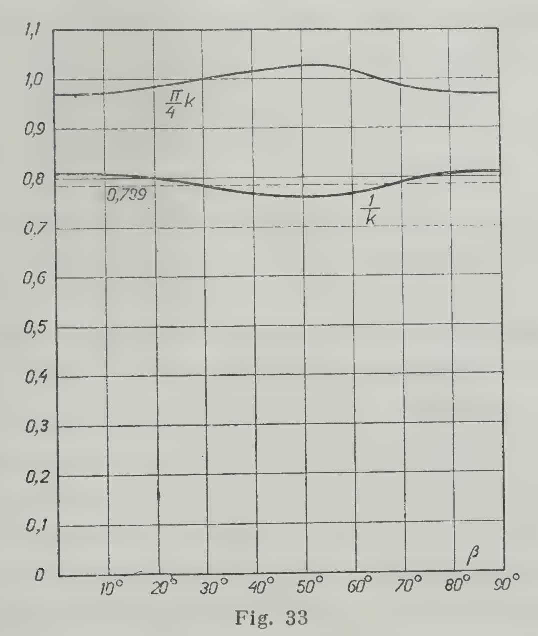


Fig. 33

figure donne le facteur de conversion $\frac{\pi}{4}k$, permettant de passer de l'intensité moyenne dI_α à l'intensité dI_o moyenne

sphérique connue. Il se fait alors que $\frac{1}{k}$, et donc aussi le facteur de conversion, son inverse, oscille légèrement autour d'une valeur moyenne. Pour la première courbe cette moyenne est de 0,789, pour la seconde de 0,995. Cette dernière valeur étant pratiquement égale à l'unité, il en résulte que lorsqu'on a affaire à un filament composé d'éléments sans inclinaison prédominante, l'intensité lumineuse moyenne sphérique est pratiquement égale à l'intensité moyenne $I_{54°}$. Dans le cas des filaments des lampes réelles il y a en général une ou plusieurs directions qui prédominent. Cependant la figure 33 montre que le coefficient de conversion dont il est question, est *presque* indépendant de γ, de sorte que l'erreur commise en adoptant dans tous les cas le coefficient moyen 0,995, ne peut être considérable.

Signalons enfin que Halbertsma (1) admet, qu'on trouverait un facteur de conversion moyen égal à l'unité, en substituant aux angles caractéristiques empiriques, d'autres angles convenablement choisis et dont les premiers ne constituent qu'une approximation.

Un autre procédé est celui dont se sert ce dernier auteur (2) en considérant un plan de photométrie fixe au lieu de celui tournant autour de l'axe Oz, tandis qu'il remplace le filament unique par un système de filaments suffisamment nombreux et régulièrement disposés sur la surface d'un tronc de cône, suivant des génératrices équidistantes de celle-ci. Le demi-angle au sommet de ce tronc de cône est égal à γ. Dans le plan de photométrie on détermine alors par le calcul et pour plusieurs valeurs de l'angle α la moyenne de l'intensité lumineuse produite par l'ensemble de ces filaments, ce qui permet de tracer la courbe polaire moyenne pour autant

(1) E. u. M. t. XXXV, 1917, p. 66
(2) Hel t. XXII, 1916, p. 329.

de valeurs de γ que l'on désire. Les courbes ainsi déterminées, et que nous reproduisons à la figure 34, ne sont évidemment pas altérées du fait que nous avons substitué des filaments de longueur infiniment petite à ceux de longueur finie qu'avait supposés Halbertsma. Le rayon du cercle en traits mixtes que l'on remarque sur cette figure représente l'intensité lumineuse moyenne sphérique, la même évidemment dans tous les cas. Afin de se rendre compte du nombre de termes à mettre en jeu pour obtenir un résultat suffisamment approché, Halbertsma compare dans un cas déterminé ($\gamma = 45^o$) la moyenne de 36 termes à celle de 12 termes seulement. Ces deux résultats ne diffèrent que très peu, de sorte qu'on est en droit d'affirmer qu'il est permis d'opérer sur un nombre de termes assez réduit, sans altérer sensiblement le degré d'exactitude du procédé. Il apparaît de même qu'il n'y a pas de position privilégiée du plan de photométrie par rapport au système lumineux.

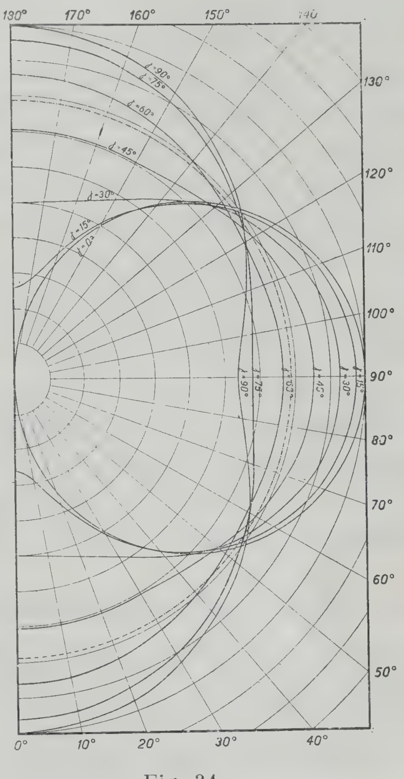


Fig. 34

L'examen de ces courbes montre immédiatement que les points où elles coupent le cercle de l'intensité lumineuse moyenne sphérique se concentrent en deux groupes assez serrés, symétriques par rapport à l'horizontale. Il en résulte de nouveau que pour un élément de droite lumineuse, les

angles caractéristiques sont *presque* indépendants de l'inclinaison de cet élément par rapport à l'axe de photométrie, d'ailleurs arbitraire.

Dans le cas d'un ensemble de ces éléments sans inclinaison prédominante, les angles caractéristiques seront les directions moyennes des deux groupes dont nous constatons l'existence dans le cas d'un seul élément. Ce cas n'est réalisé qu'approximativement par les lampes à incandescence commerciales. Cependant, étant donné l'écart relativement faible des angles individuels de leur moyenne, on peut dire en première approximation, que pour ces lampes aussi la solution générale du problème énoncé au début de ce paragraphe est donnée par les inclinaisons caractéristiques moyennes. Pour déterminer celles-ci, il faudrait résoudre par rapport à α l'équation

$$dI_\alpha = dI_o$$

ou bien

$$\int_o^\pi \sqrt{1 - (\cos\alpha \cos\gamma + \sin\alpha \sin\gamma \cos\beta)^2}.\, d\beta = \frac{\pi^2}{4}$$

ce qui donnerait les angles caractéristiques en fonction de l'inclinaison de l'élément *dl*. Ensuite, il resterait à chercher la moyenne de cette fonction, γ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Ce problème, dont à notre connaissance, aucun auteur n'a indiqué la solution analytique, peut être résolu approximativement en repérant soigneusement sur une épure à grande échelle les divers points d'intersection des courbes et de la circonférence de la figure 34, procédé qui nous a donné pour α la valeur moyenne de 54°37'.

Les auteurs qui se sont occupés de recherches expérimentales relatives aux angles caractéristiques n'ont cependant pas toujours trouvé des résultats aussi cohérents que le ferait supposer la théorie précédente. Dans la pratique on se heurte en effet à des difficultés dont nous n'avons pas

encore parlé jusqu'ici. Celles-ci sont dues à des causes de perturbation constituées par la présence de toutes les parties de la lampe autres que le filament. Les unes, tel que le culot, sont opaques et masquent la lumière dans certaines directions d'observation. D'autres, telle que l'ampoule, interviennent par leur propriétés de réflexion et de réfraction de la lumière pour modifier la répartition de celle-ci. Il y a enfin le refroidissement du filament aux endroits où il est fixé à son support. Chaque auteur a essayé une méthode particulière pour dégager des résultats expérimentaux les propriétés fondamentales de la répartition lumineuse primitive, c. à d. telle qu'elle eût été en l'absence de toute cause de perturbation.

Liebenthal (1), en se basant sur ses résultats d'expérience, croit devoir répondre négativement à la question de savoir s'il existe dans l'un des hémisphères une inclinaison caractéristique, telle que nous l'avons définie, la même pour tous les types de lampes considérés.

Il étudie ensuite une nouvelle courbe, fictive celle-là, et que nous avons déjà rencontrée, mais en coordonnées rectangulaires, au paragraphe 17. Les rayons-vecteurs de cette courbe représentent les moyennes des intensités relatives à des inclinaisons supplémentaires. Il arrive alors à la conclusion que cette courbe fournit une direction caractéristique assez bien définie, à savoir $\alpha = 51^\circ\ 48'$. Sa méthode empirique revient donc, en fin de compte, à poser

$$I_o = \frac{1}{2} (I_\alpha + I_{180^\circ - \alpha})$$

avec

$$\alpha = 51^\circ\ 48'$$

Zickler (2), en superposant des courbes polaires expéri-

---

(1) Z. f. Instr. t. XIX, 1899, p. 228.
Lehrbuch, p. 334.

(2) loc. cit., p. 472.

mentales assez diverses, après réduction à la même intensité lumineuse moyenne sphérique, constate qu'elles ont une tendance à passer toutes par deux points déterminés situés dans l'angle compris entre les directions de 50° et 60° d'une part et de 120° et 130° d'autre part, selon l'hémisphère. Cette tendance est surtout manifeste dans celui des hémisphères qui ne contient pas le culot. Elle ne suffit cependant pas pour permettre de déterminer les angles caractéristiques.

Dans le but de faire apparaître des résultats mieux caractérisés, Zickler a recours alors à un artifice consistant à rétablir l'égalité théorique des intensités lumineuses moyennes sphérique et hémisphériques. Pour cela il multiplie, dans chaque hémisphère, toutes les intensités par un même coefficient approprié et d'ailleurs facile à trouver. De cette manière une discontinuité est créée dans les courbes, ce coefficient n'étant généralement pas le même de part et d'autre de l'horizontale.

Cette opération ne modifie évidemment pas la forme des deux parties des courbes individuelles, mais comme l'influence du culot sur la répartition lumineuse varie beaucoup d'un type de lampe à un autre, cette opération entraîne des modifications assez inégales pour les différentes courbes, de sorte qu'après l'avoir effectuée, on constate sur l'épure que les courbes passent très approximativement par un même point pour les inclinaisons supplémentaires de 54° et 126°, que Zickler considère comme inclinaisons caractéristiques. Etudiant alors dans chaque hémisphère le rapport de l'intensité moyenne hémisphérique à celle mesurée sous l'angle caractéristique correspondant, Zickler trouve que ce rapport est de 0,96 pour un hémisphère et de 0,95 pour l'autre. D'où il résulte alors que l'intensité lumineuse moyenne sphérique est donnée par l'expression.

$$I_o = 0{,}955 \frac{I_{54^\circ} + I_{126^\circ}}{2}. \qquad (38)$$

Il faut bien remarquer, que les angles caractéristiques de Zickler, en raison de la manière dont ils ont été déterminés et du facteur de correction figurant dans la formule (38), ne sont pas à proprement parler conformes à la définition que nous avons donnée au début de ce chapitre.

En commentant les résultats expérimentaux de Zickler, Halbertsma cherche tout d'abord à expliquer la présence du facteur de correction moyen 0,955 dans la formule (38). En effet, ce facteur empirique est inférieur non seulement à la valeur moyenne théorique 0,995 basée sur l'emploi des angles caractéristiques de 54° et de 126°, mais même à la valeur minimum absolue théorique 0,970 que prend ce facteur pour les mêmes angles caractéristiques, dans l'intervalle

$$0^{\circ} \leq \gamma \leq 90^{\circ}.$$

Ce dernier auteur croit que la valeur du coefficient empirique trouvée par Zickler devrait être légèrement augmentée. En effet, l'essai de la formule (38) sur un assez grand nombre de courbes polaires appartenant à des lampes dont les filaments avaient des formes des plus variées, lui a donné 0,972 comme valeur moyenne dans le cas des filaments non spiralés et 0,968 dans celui des filaments spiralés. Ces valeurs, tout en se rapprochant davantage de l'unité, en diffèrent cependant encore notablement. Or, dans une étude antérieure (1) cet auteur avait déjà été amené à considérer la différence existant de fait entre les intensités moyennes sphérique et hémisphériques, en dépit de leur égalité théorique. La perte relative de lumière provoquée par la présence du culot, qu'il avait constatée à cette occasion, était du même ordre de grandeur que la différence entre les dernières valeurs du facteur de correction de Zickler et l'unité. Il n'est donc pas illogique de chercher dans ce sens l'explication de cet écart, en admettant que sans la présence du culot, le facteur de correc-

(1) Hel. t. XXII, 1916, p. 329.

tion en question serait égal à l'unité, à condition que les angles caractéristiques aient été judicieusement choisis.

Il est intéressant de signaler ici que Rousseau (1) aussi avait déjà constaté l'existence d'un rapport sensiblement constant entre les flux lumineux des deux hémisphères. Selon lui ce rapport était égal, en moyenne, à 39 : 41 = 0,95, c. à d. que le culot des lampes essayées par lui, absorbait environ 2,5 % du flux total produit.

L'intensité lumineuse moyenne sphérique étant théoriquement égale à chacune des intensités lumineuses moyennes hémisphériques, quelle que soit la lampe considérée et quelle que soit la direction de l'axe de photométrie, Halbertsma estime que la distribution lumineuse dans l'hémisphère qui ne contient pas le culot est celle qui diffère le moins de la distribution réelle du filament. Il serait donc permis d'opérer sur des lampes munies de leur culot, mais en se bornant au seul hémisphère où l'absence de culot autorise à considérer la distribution lumineuse comme pratiquement inaltérée. Ceci suppose qu'il n'y a à tenir compte d'aucun autre effet perturbateur et notamment qu'aucune lumière n'est réfléchie par le culot d'un hémisphère dans l'autre. En mesurant alors l'intensité lumineuse moyenne sous un seul angle caractéristique convenablement choisi, on trouverait donc ainsi l'intensité lumineuse sphérique du filament étudié, dont on pourrait déduire celle de la lampe par une correction appropriée, afin de tenir compte de la perte occasionnée par le culot. On serait donc ainsi ramené à l'emploi d'un facteur de correction comme dans le cas de la formule de Zickler. La façon d'opérer de Halbertsma satisfait cependant mieux l'esprit, puisqu'il n'a recours à aucun artifice arbitraire pour compenser l'influence du culot.

---

(1) C. R. Anv. 1885, p. 148.

31) *Méthode des coefficients caractéristiques.*

Parfois on a à faireà des solides photométriques tous de même forme. Les flux lumineux sont alors dans le même rapport que les intensités lumineuses dans une direction déterminée, la même dans tous les cas, que l'on peut considérer comme direction type. Il suffira donc de connaître le rapport de l'intensité lumineuse relative à cette direction pour l'un quelconque de ces solides photométriques, à celle d'un solide choisi à volonté, dont on aura déterminé une fois pour toutes le flux lumineux qu'il représente. En somme, cela reviendra à multiplier l'intensité dans la direction type par un coefficient caractéristique, dépendant uniquement de la forme du solide photométrique envisagé.

Comme en réalité les solides photométriques ne présentent que rarement ce caractère de similitude parfaite, il va de soi que la méthode ne saurait être qu'approximative. Aussi ne lui demande-t-on qu'une idée approximative de l'ordre de grandeur du flux lumineux cherché.

La précision s'améliore en opérant, non plus sur une seule intensité lumineuse, mais sur une intensité moyenne, pour laquelle on choisit fréquemment l'intensité moyenne horizontale.

Dans le cas de sources de lumière filiformes, on peut dans certaines circonstances, opérer sur l'intensité maximum, quelle que soit d'ailleurs la direction dans laquelle celle-ci se produit, ainsi que nous allons le voir.

Nous savons en effet, que pour un élément de filament cylindrique, d'éclat uniforme, le flux lumineux est donné par l'expression

$$d\phi = \pi^2 \, d\mathrm{I}_m \qquad (39)$$

dans laquelle

$$d\mathrm{I}_m = \varepsilon \, dl$$

ε étant l'éclat linéaire du filament. L'équation (39) peut donc encore s'écrire

$$d\phi = \pi^2 \, \varepsilon \, dl$$

Il en résulte, que pour le filament tout entier on a

$$\phi = \pi^2 \varepsilon L$$

où L est la longueur totale du filament.

S'il existe une direction dans laquelle le filament se projette sans diminution de longueur, sur un plan perpendiculaire à cette direction, le produit ε L n'est autre que l'intensité lumineuse dans cette direction et elle est alors en même temps l'intensité maximum. Le coefficient caractéristique est donc π^2 dans ce cas. Si une telle direction n'existe pas, l'intensité maximum est inférieure à ce produit et le coefficient caractéristique ne peut alors être déterminé que par voie expérimentale.

Dans cette catégorie nous classerons encore les formules empiriques dont le prototype est celle indiquée dans le rapport d'Allard, Le Blanc, Joubert, Potier et Tresca (1) auquel nous avons déjà fait allusion. Cette formule donne l'intensité lumineuse moyenne sphérique des lampes à arc à courant continu. Elle s'écrit

$$I_o = \frac{1}{2} I_h + \frac{1}{4} I_m$$

où I_h et I_m représentent respectivement l'intensité moyenne horizontale et l'intensité maximum.

Cette même formule a été retrouvée plus récemment par voie synthétique par Halbertsma (2).

VI. — **Distributions lumineuses asymétriques**

Lorsque le solide photométrique n'est pas de révolution, les procédés décrits cessent d'être applicables. Dans ce cas l'emploi de méthodes spéciales s'impose donc.

32) *Procédé du Franklin Institute.*

La méthode générale de détermination du flux lumineux, l'intensité lumineuse étant connue pour toutes les directions de l'espace, consiste à chercher la moyenne de toutes ces intensités et à multiplier celle-ci par 4 π.

---

(1) Ann. Ch. Ph. t. XXIX (5e série), 1883, p 23.
(2) Hel. t. XXII, 1916, p. 311.

Dès 1885, ainsi que le rappelle Rowland (1), le Franklin Institute avait adopté un procédé simple pour arriver à ce but. Supposons la source à étudier située au centre d'une sphère de rayon unitaire. Des aires égales prises sur cette surface sphérique soustendent des angles solides égaux au centre de la sphère. Si ces angles sont suffisamment petits, pour qu'on y puisse assimiler la distribution lumineuse à une distribution uniforme, le flux lumineux à l'intérieur de chacun de ces angles solides partiels peut être pris égal au produit de l'angle solide par l'intensité lumineuse qui y règne. Pour cette dernière on prend alors celle qui correspond à la direction moyenne de l'angle solide. Le problème revient donc à déterminer ces directions moyennes, à faire la moyenne des intensités lumineuses qui y correspondent, et à multiplier cette moyenne par 4 π. Les directions adoptées par le Franklin Institute, au nombre de 38, sont les suivantes, rapportées à notre système de coordonnées habituel.

Latitude	Longitude	Nombre de directions
0° et 180°	2 pôles	2
30° et 150°	0°, 90°, 180°, 270°	8
60° et 120°	0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°	16
90°	0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°	12

Tableau X. Directions utilisées dans le procédé du Franklin Institute.

(1) T. I. E. S. t. VII, 1912, p. 317.

Pour nous rendre compte de la valeur de ces données, nous analyserons le problème. Pour cela il est commode de se servir d'un mode de projection permettant de développer la surface sphérique, tout en conservant les aires.

Considérons un cylindre tangent à la sphère suivant l'équateur de celle-ci. Projetons tous les points de la sphère sur ce cylindre, les projetantes étant des droites issues de l'axe du système et perpendiculaires à cet axe. Les méridiens de la sphère auront pour projections sur le cylindre les génératrices de celui-ci ; les projections des parallèles seront des cercles situés dans le même plan qu'eux. Ouvrons la surface cylindrique suivant une génératrice et développons-la. De cette manière nous obtenons un système de coordonnées rectangulaires correspondant aux coordonnées curvilignes de la sphère. Ces deux systèmes jouissent de la propriété qu'une courbe quelconque transportée de l'un d'eux dans l'autre, délimite toujours des portions de surface de même aire.

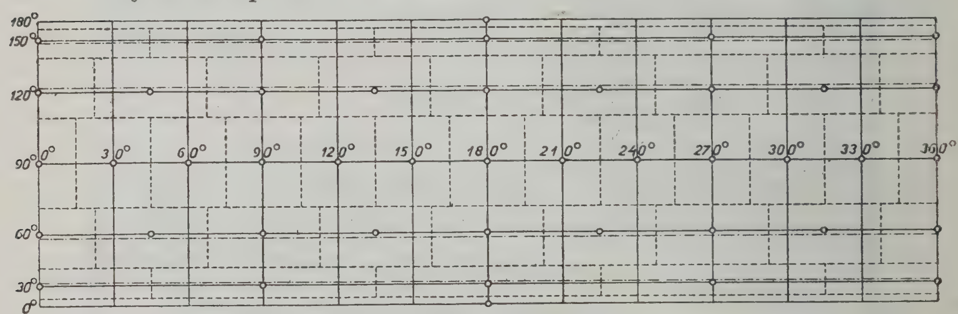


Fig. 35

La figure 35 représente la surface sphérique ainsi développée. Les points du Franklin Institute y sont représentés par des petits cercles. Cherchons s'il y a moyen de diviser la surface totale par des arcs de méridiens et de parallèles, en 38 parties égales dont ces points occupent les centres.

Une première bande, comprise entre deux parallèles tracés à une distance h_1 de part et d'autre de l'équateur, comprendra 12 sections. L'aire d'une seule section étant

$$s = \frac{4\pi}{38} = \frac{2\pi}{19}$$

nous pouvons écrire

$$12 \times \frac{2\pi}{19} = 2\pi \times 2h_1$$

d'où

$$h_1 = \frac{6}{19}.$$

De même, la deuxième zone, comprenant 8 sections aura pour hauteur

$$h_2 = \frac{8}{19}$$

tandis que les troisième et quatrième zones, comprenant respectivement 4 et 1 sections, auront des hauteurs

$$h_3 = \frac{4}{19}$$

$$h_4 = \frac{1}{19}.$$

La hauteur totale de toutes les zones sera donc de

$$2(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = \frac{38}{19} = 2$$

c. à d. que cette hauteur représente exactement la hauteur totale de la sphère. La subdivision de la surface sphérique est donc rigoureusement exacte.

Elle est indiquée sur la figure par les lignes en pointillé. Les directions du tableau X ne passent cependant pas par les centres des sections.

On voit facilement que la latitude de ces centres pour les quatre zones comprises entre la zone de l'équateur et celles des pôles sont déterminées par les relations :

$$\cos \alpha_2 = \pm \left[h_1 + \frac{h_2}{2}\right] = \pm \frac{10}{19}$$

$$\cos \alpha_3 = \pm \left[h_1 + h_2 + \frac{h_3}{2}\right] = \pm \frac{16}{19}$$

d'où les valeurs suivantes pour la latitude au lieu de celles ndiquées antérieurement :

Ancienne valeur	Valeur corrigée
30°	32° 22′
60°	58° 15′
120°	121° 45′
150°	147° 38′

Tableau XI. Latitudes corrigées des directions du tableau X.

Ce tableau, ainsi que les parallèles correspondants aux latitudes corrigées tracées en traits mixtes sur la figure 35, montrent qu'on peut utiliser pratiquement les anciennes valeurs du Franklin Institute sans s'écarter beaucoup du résultat théorique.

En définitive, d'après cette méthode le flux lumineux total cherché, sera donné par la somme des intensités lumineuses dans les 38 directions définies, multipliée par $\frac{4\pi}{38}$, c. à d.

$$\phi = 0{,}331 \ \Sigma \ I$$

Les portions dans lesquelles nous venons de partager la surface sphérique, quoique rigoureusement de même grandeur, sont cependant loin d'avoir toutes la même forme. D'autre part leur disposition réciproque n'est pas régulière, la position des bandes l'une par rapport à l'autre étant arbitraire. Il en résulte que les intensités lumineuses considérées ne sont pas régulièrement distribuées dans l'espace. On serait donc tenté de faire d'abord la moyenne par bande et de l'étendre ensuite à la sphère entière. Il faut cependant renoncer à cette façon d'opérer, puisque les latitudes utilisées n'ont rien de commun

avec les angles de Russell-Bloch, qui sont les seuls qui permettent de faire cette dernière moyenne.

Les subdivisions de la sphère indiquées par Hering (1) sont absolument analogues à celle que nous venons d'étudier, et n'en diffèrent que par le nombre de termes mis en jeu. Nous pouvons donc nous contenter de les mentionner ici.

33) *La Méthode de Hering.*

Hering (2) arrive à une subdivision de l'espace, dans laquelle les angles solides partiels satisfont à la condition d'être de même grandeur, de même forme régulière et régulièrement disposés les uns par rapport aux autres. Pour obtenir ce résultat il se sert de polyèdres réguliers. Les arêtes de ceux-ci déterminent en effet des angles solides au centre satisfaisant aux conditions énoncées. Les perpendiculaires abaissées du centre sur les faces se trouvent à des distances angulaires égales de toutes leurs voisines. Les intensités lumineuses mesurées dans la direction de ces perpendiculaires sont donc absolument de même poids et on peut considérer leur moyenne comme intensité lumineuse moyenne sphérique, avec une approximation allant en augmentant avec le nombre de faces du polyèdre.

L'expression « voisin » s'applique ici à toutes les faces ayant une arête commune avec celle dont on considère la perpendiculaire. Lorsque le nombre de faces qui se rencontrent en un même sommet dépasse trois (octaèdre, icosaèdre), Hering considère aussi comme voisines les perpendiculaires relatives à des faces n'ayant qu'un sommet en commun, mais la règle de l'équidistance ne leur est pas applicable. Hering exige aussi que les faces des polyèdres se rapprochent autant que possible de cercles, mais on ne voit pas bien pourquoi il ne suffirait pas que ces faces soient toutes identiques et

(1) T. I. E. S. t. IV, 1909, p. 372.
(2) loc. cit. p. 356.

constituées par des polygônes réguliers et régulièrement disposés. Cette remarque de Hering est inspirée directement par le fait qu'on n'obtiendrait pas une bonne moyenne en subdivisant la surface sphérique en fuseaux, et en mesurant l'intensité lumineuse dans les directions correspondant aux centres de ceux-ci. En effet, toutes les mesures se rapporteraient alors au plan de l'équateur, et l'on trouverait en réalité l'intensité lumineuse moyenne horizontale. Mais il convient de ne pas perdre de vue que cette subdivision de la surface sphérique ne correspond à aucun polyèdre régulier, ni même irrégulier, et ce cas est donc entièrement étranger aux considérations qui nous occupent en ce moment. Quel que soit le polyèdre régulier considéré, en procédant comme nous l'avons dit plus haut, on obtient toujours un nombre de directions plus ou moins grand, mais réparties uniformément dans l'espace et donc toutes de même poids.

Pour l'application de la méthode, nous supposerons la source de lumière située au centre d'un polyèdre, pour lequel nous prendrons le cube. Celui-ci peut évidemment occuper une position quelconque par rapport à la source de lumière. Cependant nous le mettrons d'abord dans trois positions particulières. Dans la première de celles-ci, l'axe du solide photométrique coïncide avec la droite de support des perpendiculaires à deux faces opposées du cube (fig. 36). Les intensités lumineuses à mesurer sont alors celles suivant les verticales descendante et ascendante, et celles suivant quatre directions équidistantes dans le plan de l'équateur.

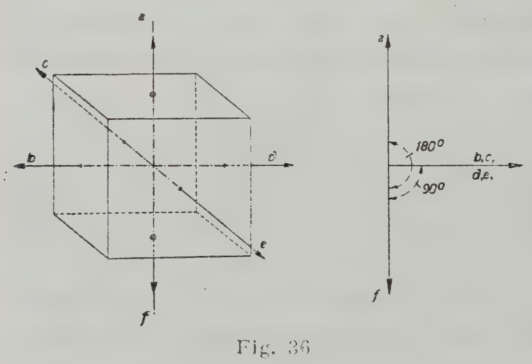


Fig. 36

Dans la deuxième position (fig. 37) l'axe du solide photométrique coïncide avec la direction d'une grande diagonale du cube. Les directions des six perpendiculaires constituent alors deux groupes de trois, formant les mêmes angles avec la verticale descendante ou ascendante. La distribution azimuthale est aussi symétrique.

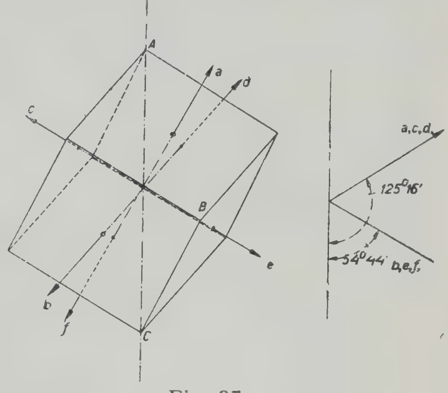


Fig. 37

Dans la troisième position enfin, l'axe du solide photométrique passe par les milieux de deux arêtes opposées du cube (fig. 38). Les six directions se répartissent en deux groupes, situés dans des plans verticaux perpendiculaires entre eux. Le premier groupe comprend deux directions horizontales opposées, le second quatre directions, deux à deux opposées et formant des angles de 45° avec la verticale.

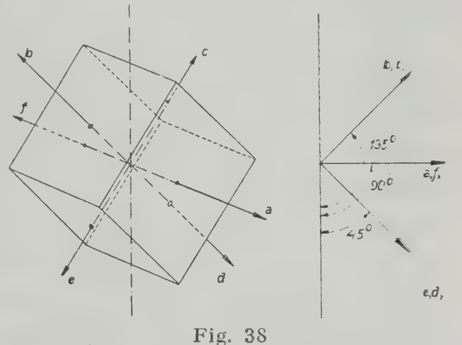


Fig. 38

Les angles de toutes ces directions avec la verticale descendante dans chacun de ces trois cas sont indiqués à côté des figures. Il est aisé de se rendre compte de ce que le carré moyen des sinus de ces angles est égal à 2/3. Ce fait constitue la loi de Hering (1). Cette loi, que son auteur ne démontre d'ailleurs pas, est vraie, quel que soit le polyèdre considéré, et quelle que soit la position relative des axes du

(1) loc cit. p. 370.

polyèdre et du solide photométrique. Nous la démontrerons pour le cas du cube. Soit (fig. 39) $Oxyz$ un trièdre trirectangle. Les directions Ox, Oy et Oz sont trois des six directions à considérer dans le cube. Soit OM la direction de l'axe du solide photométrique. OM fait avec les axes Ox, Oy et Oz les angles α, β et γ.

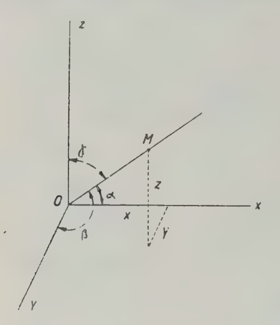


Fig. 39

Traçons le contour des coordonnées du point M, le segment OM étant supposé égal à l'unité. Alors

$$x = \cos \alpha$$
$$y = \cos \beta$$
$$z = \cos \gamma$$

et d'autre part

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

ou bien

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

Comme les trois directions non représentées forment avec OM des angles ayant mêmes sinus que les angles α, β et γ, nous pouvons faire la moyenne de la somme que nous avons trouvée :

$$\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}{3} = \frac{2}{3} \qquad \text{c. q. f. d.}$$

D'après Hering cette loi serait également applicable au cas de la division en zones d'égale hauteur, c. à d. aux angles de Russell-Bloch. Il est facile de voir qu'il n'en est pas ainsi. En effet, nous devons chercher la valeur de l'expression

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \sin^2 \alpha_p \tag{40}$$

les angles α_p étant ceux de Russell-Bloch. Or, on a identiquement

$$\sin^2 \alpha_p = 1 - \cos^2 \alpha_p \tag{41}$$

et nous connaissons les cosinus de ces angles, dont l'expression générale peut se mettre sous la forme

$$\cos \alpha_p = \frac{n+1}{n} - \frac{2p}{n}$$

d'où

$$\cos^2 \alpha_p = \left[\frac{n+1}{n}\right]^2 - 4\,\frac{n+1}{n^2}\,p + \frac{4p^2}{n^2} \qquad (42)$$

En tenant compte des relations (41) et (42), l'expression (40) peut se développer de la façon suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n} \sin^2 \alpha_p = 1 - \frac{(n+1)^2}{n^2} + 4\,\frac{n+1}{n^3}\sum_{p=1}^{p=n} p - \frac{4}{n^3}\sum_{p=1}^{p=n} p^2$$

En effectuant tous les calculs, il vient finalement

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n} \sin^2 \alpha_p = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n^2}$$

de sorte que la loi de Hering n'est applicable qu'aux seules subdivisions de l'espace basées sur les polyèdres réguliers, tandis qu'elle est une loi limite dans le cas de la subdivision Russell-Bloch, où le nombre de termes considérés tendrait vers l'infini.

Lorsque plusieurs des directions dans lesquelles l'intensité lumineuse doit être mesurée, ont la même inclinaison, Hering prend l'intensité lumineuse moyenne suivant le parallèle correspondant et lui attribue un coefficient égal au nombre de termes impliqués. Ce procédé est inadmissible. En effet, lorsqu'on juge qu'une seule détermination d'intensité lumineuse par face de polyèdre n'assure pas une précision suffisante, on pourrait par un procédé convenable, déterminer une valeur mieux approchée de l'intensité lumineuse moyenne relative à chaque face. Il n'est donc pas exact de chercher la moyenne, même rigoureuse, des intensités rencontrées en suivant une ligne arbitraire tracée à l'intérieur du polygône limitant une face. Or, c'est ce qu'on fait en suivant un parallèle.

Des considérations analogues à celles qui précèdent peuvent être faites pour les autres polyèdres réguliers.

Pour augmenter le nombre de termes intervenant dans l'établissement de la valeur de l'intensité lumineuse moyenne sphérique, on pourrait aussi, selon Hering, superposer plusieurs positions d'un même polyèdre, ou même de plusieurs polyèdres différents. Toutefois, les termes relatifs à toutes ces directions n'étant plus de même poids, il y aurait à établir d'abord séparément la moyenne des termes appartenant à chacun de ces systèmes et ensuite seulement celle des valeurs ainsi obtenues. On voit facilement qu'il ne saurait en être ainsi. En effet, considérons plusieurs groupes, *p* par exemple, composés chacun d'un même nombre *q* de termes de même poids. Au total il y a donc *p q* termes, mais de poids différents. Dans chacun des *p* groupes on fait la moyenne des *q* termes qui le composent, puis celle des *p* moyennes ainsi obtenues. Mais cela revient à faire la moyenne globale des *pq* termes primitifs, lesquels n'étant pas de même poids, donnent une moyenne sans signification. A fortiori, si les nombres de termes des groupes individuels sont différents, il est impossible de justifier la méthode.

Citons enfin, à titre documentaire, la solution approchée du problème, adoptée dès avant 1880 par Weston, et rappelée par Hering (1). Les directions choisies par Weston sont celles correspondant aux sommets d'un icosaèdre (12 points), aux centres des faces de ce même polyèdre (20 points) et enfin aux points divisant en 3 parties égales chacune de ses arêtes (60 points), soit au total 92 directions à peu près uniformément réparties dans l'espace.

34) *Volume photométrique de Rousseau.*

Parmi les divers procédés indiqués par Rousseau pour la détermination du flux lumineux, il y en a un qui permet de représenter par un volume un flux lumineux de distribution quelconque, en même temps que sa répartition (2).

(1) loc. cit. p. 377.
(2) Ing Cons. t. VI, 1883/84, p. 248.

Soit donc (fig. 40) LMN une courbe méridienne du solide photométrique que nous nous proposons d'étudier. Il n'est pas nécessaire que celui-ci soit de révolution. Nous effectuerons alors une construction tout à fait analogue à celle décrite au paragraphe 7, sauf que le vecteur $m_1 m_1'$ ne représentera pas l'intensité lumineuse, mais la racine carrée de celle-ci. A proprement parler cette construction devrait être effectuée dans le plan méridien qui contient la courbe polaire correspondante. Pour dégager la figure, nous l'avons reportée à gauche de l'axe AC. Cette construction effectuée pour tous les points de la courbe polaire LMN donne une nouvelle courbe DEF. L'ensemble des courbes telles que DEF forment une surface, dont chaque point correspond à une direction déterminée issue de O. Le volume renfermé par cette surface et ses sections planes terminales constitue le volume photométrique de Rousseau, dont nous allons rechercher les propriétés.

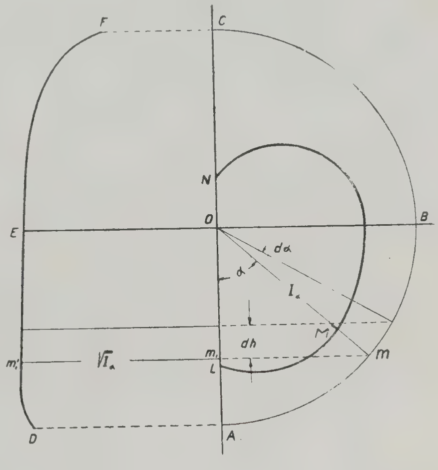


Fig. 40

Considérons maintenant un second plan méridien, faisant un angle $d\beta$ avec celui de la figure. Le flux lumineux compris entre ces deux plans et les inclinaisons α et $\alpha + d\alpha$ a pour valeur

$$d^2\phi = \mathrm{I} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta.$$

D'autre part, la portion découpée dans le volume photométrique de Rousseau par ces mêmes plans méridiens et les sections droites correspondantes aux inclinaisons α et $\alpha + d\alpha$ est donnée par

$$d^2\mathrm{V} = \tfrac{1}{2} \mathrm{I} \, d\beta \sin \alpha \, d\alpha.$$

La comparaison de cette expression à la précédente montre que l'on a

$$d^2\phi = 2\, d^2V.$$

Cette relation constitue la propriété fondamentale du volume photométrique de Rousseau. On peut donc exprimer cette propriété en disant que le flux lumineux passant par une courbe fermée quelconque tracée sur la sphère, a pour mesure le double de la portion découpée dans le volume photométrique de Rousseau par une génératrice passant toujours par l'axe de la figure et perpendiculaire à celui-ci et s'appuyant d'autre part sur la courbe donnée reportée sur la surface du volume photométrique.

Dans le cas d'une distribution lumineuse symétrique le volume photométrique sera également de révolution ; pour une distribution tout à fait uniforme ce sera un cylindre.

35) *Méthode de Herzog et Feldmann.*

Les considérations développées à propos du procédé du Franklin Institute, au sujet du développement de la surface sphérique ont aussi été mises à profit par Herzog et Feldmann (1). Le mode de projection décrit, jouit de la

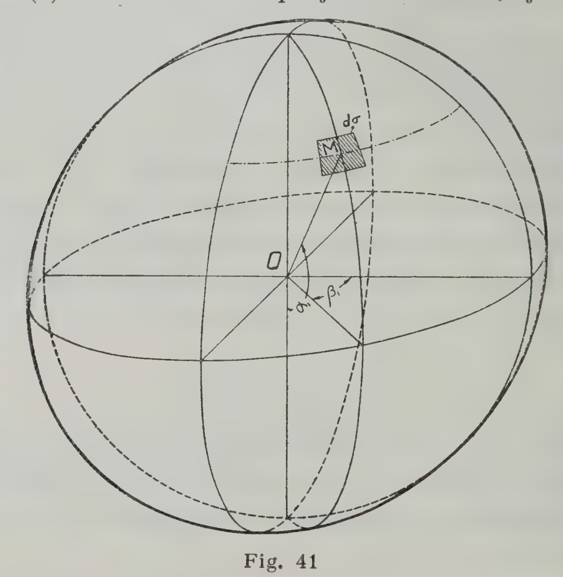


Fig. 41

(1) E. T. Z. t. XXVIII, 1907, p. 93.

propriété de ne pas altérer les aires. Considérons en particulier (fig. 41) une aire élémentaire $d\sigma$ s'étendant autour du point M sur la sphère. Elle soustend un angle solide $d\omega$ au centre de la sphère, égal à $d\sigma$, si le rayon est égal à l'unité.

L'intensité lumineuse dans la direction OM étant I, le flux lumineux $d\phi$ dans $d\omega$ sera

$$d\phi = \mathrm{I}\, d\sigma$$

Autour du point M′ (fig. 42), correspondant dans le

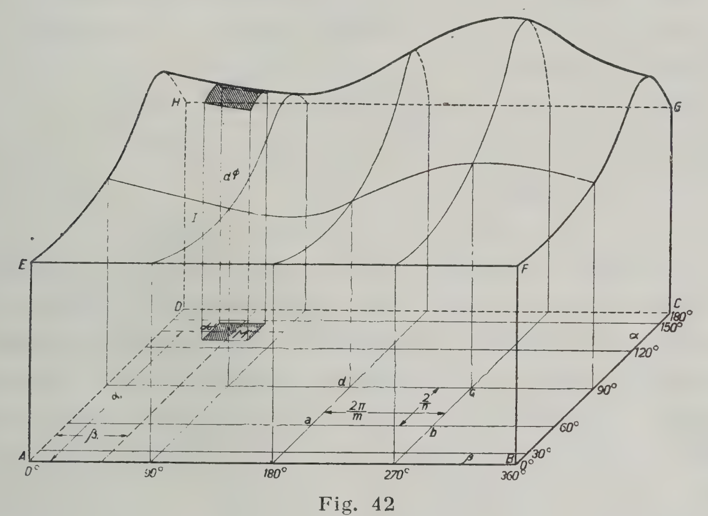


Fig. 42

système de coordonnées rectangulaires au point M de la sphère, nous retrouvons une aire élémentaire $d\sigma'$ de même grandeur que $d\sigma$, quoique de forme différente. Le flux lumineux $d\phi$ sera donné par le volume du cylindre élémentaire droit ayant $d\sigma' = d\sigma$ pour base et I pour génératrice.

Puisqu'il en est de même pour tous les autres points de la sphère, le flux lumineux total sera donné par le volume du solide délimité par le plan des coordonnées rectangulaires, par quatre plans perpendiculaires à celui-ci et passant par les côtés du rectangle des coordonnées et enfin par la surface lieu des extrémités des vecteurs I portés perpendiculairement au plan des coordonnées.

On voit enfin que la courbe d'Allard doit être considérée comme un cas particulier du cas présent. En effet, lorsque le solide photométrique est de révolution, c. à d. lorsque toutes ses méridiennes sont identiques, le solide que nous venons de définir prend la forme d'un prisme, complètement défini par sa section droite et sa hauteur. Cette section droite n'est autre que la courbe d'Allard, la hauteur étant constante et égale à 2π.

Pour trouver la valeur du flux lumineux cherché, partageons la base du solide photométrique rectangulaire en un certain nombre de rectangles partiels, par deux systèmes de droites parallèles et équidistantes. Substituons alors au volume réel, la somme des volumes des prismes ayant pour bases ces rectangles partiels et pour hauteurs les ordonnées aux centres de ceux-ci. Cela revient à choisir sur le solide photométrique polaire un certain nombre de plans méridiens équidistants, et de faire dans chacun d'eux la somme des intensités lumineuses correspondant aux angles de Russell-Bloch, et de multiplier leur somme globale par une constante dépendant du mode de subdivision. Déterminons cette constante, qui n'est autre que l'aire d'un rectangle partiel découpé dans la base du solide photométrique rectangulaire. En prenant m plans méridiens, et n angles de Russell-Bloch, la constante cherchée sera

$$K = \frac{2\pi}{m} \frac{2}{n}$$

ou, puisqu'en général $n = 20$

$$K = \frac{\pi}{5m}$$

36) *Méthode de Weaver.*

Un moyen réellement ingénieux a été imaginé par Weaver (1) pour représenter dans le plan la répartiton spatiale

(1) T. I. E. S. t. XXII, 1927, p. 550.

complète de la lumière d'une source lumineuse, asymétrique ou non.

On sait que le flux lumineux relatif à la zone comprise entre les parallèles α et $\alpha + d\alpha$ est représenté dans le diagramme d'Allard (fig. 43) par une bande *a b d c* comprise entre deux ordonnées distantes de

$$dh = \sin \alpha \, d\alpha.$$

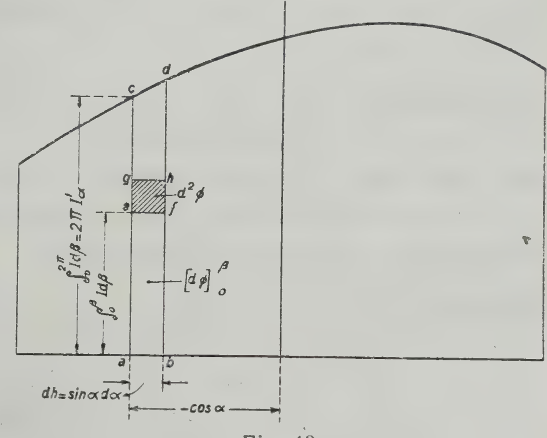


Fig. 43

Nous avons vu d'autre part, que dans cette zone, le flux lumineux compris entre les méridiens β et $\beta + d\beta$ a pour valeur

$$d^2\phi = \mathrm{I} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta.$$

A l'intérieur de cette zone, le flux lumineux s'accroît donc en fonction de l'azimuth β, suivant la loi

$$\left[d\phi \right]_0^\beta = \sin \alpha \, d\alpha \int_0^\beta \mathrm{I} \, d\beta \qquad (43)$$

Dans le diagramme d'Allard, ce flux est représenté par un trapèze infinitésimal, assimilable à un rectangle *a b f e*. Celui-ci a pour base

$$\sin \alpha \, d\alpha$$

et donc pour hauteur

$$\int_0^\beta \mathrm{I} \, d\beta \, . \qquad (44)$$

La loi de répartition azimuthale (43) pourra donc être représentée en graduant l'ordonnée initiale *a c*, relative à l'inclinaison α, proportionnellement à la quantité (44),

c. à d. proportionnellement à l'intégrale de l'intensité lumineuse le long de ce parallèle.

En répétant cette opération pour toutes les ordonnées du diagramme d'Allard, on obtient un faisceau de courbes transversales correspondant aux méridiens, et constituant avec les ordonnées correspondant aux parallèles, un système de coordonnées représentant toute la surface de la shpère et jouissant de la propriété que toute courbe y tracée, comprend une aire représentant le flux lumineux rayonné dans l'angle solide compris dans le cône ayant pour directrice cette même courbe reportée sur la sphère.

Remarques.

a) Il y a lieu de remarquer que la graduation des ordonnées extrêmes est nécessairement linéaire, l'intensité lumineuse dans les directions $\alpha = 0^o$ et $\alpha = 180^o$ étant unique.

b) En opérant comme nous l'avons dit, on n'obtient pas à strictement parler, le diagramme d'Allard ordinaire, mais bien un tel diagramme dont toutes les ordonnées se trouvent multipliées par 2π, c. à d. que la multiplication ultérieure des aires du diagramme par cette constante se trouve supprimée, ces aires représentant directement les flux.

Cette remarque n'a cependant que peu de portée pratique, puisqu'elle concerne une question d'échelles, auxquelles on est toujours maître de donner telle valeur que l'on désire.

c) On peut aussi regarder le nouveau diagramme comme étant la superposition des diagrammes d'Allard partiels relatifs à des fuseaux successifs, compris entre les méridiens correspondant aux courbes transversales limitant ces diagrammes partiels.

d) Dans la pratique il arrive le plus souvent que les appareils d'éclairage à distribution asymétrique présentent cependant un ou deux plans de symétrie. Dans ce cas on

peut évidemment se contenter de la représentation de la répartition du flux dans un hémisphère ou un quadrant.

Construction.

Pour construire les courbes du diagramme que nous venons d'étudier, il faudra forcément recourir à une méthode approchée.

Weaver procède par le calcul en déterminant pour plusieurs parallèles, équidistants ou non, les sommes successives des intensités lumineuses dans des plans méridiens nécessairement équidistants.

Le procédé théoriquement rigoureux consisterait à prendre sur chaque arc de parallèle, l'intensité lumineuse moyenne y relative, et à multiplier celle-ci par l'ouverture angulaire de cet arc. L'approximation introduite par Weaver porte donc sur l'intensité lumineuse, une intensité individuelle prise sur cet arc étant substituée à l'intensité moyenne. En divisant le parallèle en arcs de même longueur, leur ouverture figurera en facteur commun dans tous les termes et il suffira donc alors d'ajouter successivement les intensités lumineuses équidistantes en azimuth. La longueur de l'arc n'interviendra alors que dans la détermination de l'échelle.

Pour fixer les idées, considérons dans la partie droite de la figure 44 le réseau de coordonnées de Weaver. Pour obtenir les points de division sur la droite $\alpha=60^{\circ}$, par exemple, on porte à partir de la base du diagramme des longueurs m_0m_1, m_0m_2, m_0m_3 etc., proportionnelles aux quantités $I_{60^{\circ}}$, $I_{60^{\circ}}+I_{120^{\circ}}$, $I_{60^{\circ}}+I_{120^{\circ}}+I_{180^{\circ}}$, etc.

Nous avons appliqué dans cette même figure un procédé basé sur l'intégration graphique. La courbe AA′ dans la partie gauche de la figure, représente la loi de variation de l'intensité lumineuse le long d'un parallèle déterminé. Dans l'exemple choisi $\alpha=60^{\circ}$. Par les ordonnées *a a*, *b b*, *c c*, etc. on divise la courbe en un certain nombre de tronçons et selon

le procédé bien connu de l'intégration graphique par abscisses moyennes, on construit le polygône d'intégration $Oa'b'$..... $f'B$, dont les rayons sont parallèles aux rayons du diagramme polaire tracé à gauche, et qui a ses sommets aux points d'abscisse moyenne des arcs correspondants de la courbe AA'. La courbe intégrale proprement dite est inscrite dans le polygône qu'on vient de construire et dont les côtés sont des tangentes à cette courbe, les points de contact se trouvant au droit des points de division pris sur la courbe primitive. Si cependant le nombre de ces divisions est suffisamment élevé, la courbe intégrale diffère peu du polygône de ses tangentes. Dans la figure nous avons substitué ce dernier à la courbe. Pour trouver enfin les points de division sur la droite $\alpha = 60°$, dans le diagramme de Weaver, il suffit de projeter sur cette droite en m'_1, m'_2, m'_3, etc. les points m_1, m_2, m_3, etc. du polygône d'intégration, ayant pour abscisses les valeurs de β

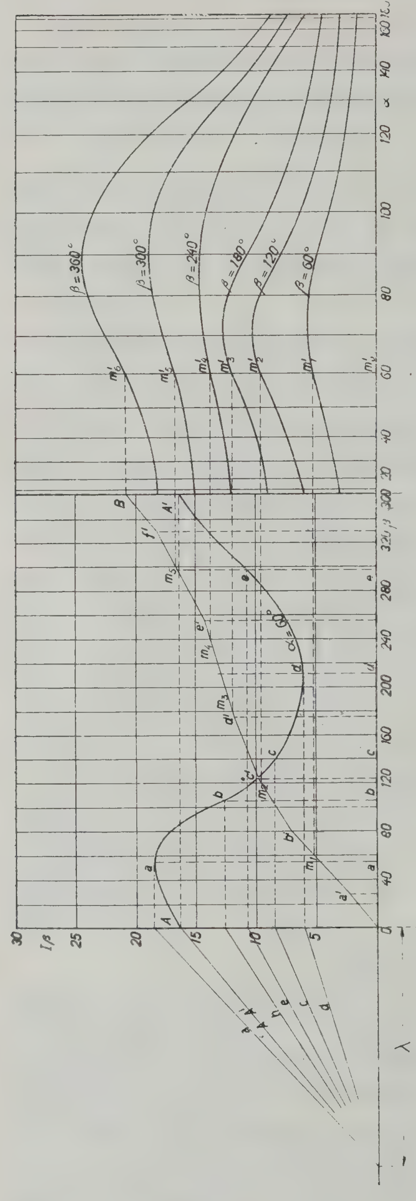


Fig. 44

pour lesquelles on veut tracer les courbes transversales de Weaver. Dans la figure nous avons pris des plans méridiens distants de 60° en 60°. L'opération décrite est évidemment à répéter pour un nombre plus ou moins grand de valeurs de α.

Echelles.

L'échelle $u_{\emptyset}$ à laquelle le flux lumineux se trouve représenté, résulte des échelles u_I, u_β et u_ω auxquelles on représente respectivement l'intensité lumineuse I et l'azimuth β dans la partie gauche de la figure, et l'angle solide ω dans sa partie droite, ainsi que de la distance polaire $\overline{\lambda}$.

En posant

$$u_I = a \ \frac{\text{cm}}{\text{bg}}$$

$$u_\beta = b \ \frac{\text{cm}}{\text{rad}}$$

$$u_{\omega} = c \ \frac{\text{cm}}{\text{stér}}$$

$$\overline{\lambda} = \lambda \ \text{cm}$$

on a

$$u_{\emptyset} = \frac{abc}{k\lambda} \ \frac{\text{cm}^2}{\text{lum}}$$

où k est égal au nombre de dièdres dans lesquels l'espace se trouve divisé par les plans de symétrie. Il ne faut évidemment tenir compte du coefficient k que lorsqu'on n'opère que sur un seul de ces dièdres et que l'on désire connaître le flux total.

Accessoirement, l'intensité lumineuse moyenne relative à chaque parallèle est représentée à l'échelle

$$u_{I'} = 2\pi \frac{ab}{\lambda} \ \frac{\text{cm}}{\text{bg}} .$$

Dans un appareil comme ceux que nous considérons, où la dyssymétrie est voulue, cette notion d'intensité moyenne relative à un parallèle n'a évidemment qu'une valeur pratique très faible.

Extension aux autres diagrammes représentant le flux par une aire.

On peut facilement établir les équations des courbes représentant les méridiens dans le diagramme de Gerhardt, ainsi que dans celui de Dispenza et de Matthews, de manière à obtenir des réseaux de coordonnées tels, que toute courbe y tracée comprend une aire proportionnelle au flux lumineux passant par la courbe correspondante sur la sphère. Les constructions auxquelles conduisent ces relations analytiques, tout en ne présentant aucune difficulté, sont cependant trop longues pour être pratiques. Nous les passerons donc sous silence.

37. *Méthodes de Solomon et de Pécheux.*

Dans le cas de sources lumineuses asymétriques, Solomon (1) détermine la courbe polaire moyenne de la façon suivante. Dans un diagramme en coordonnées rectangulaires, dont les abscisses représentent les azimuths et les ordonnées les intensités lumineuses, il trace des courbes d'intensité à latitude constante (fig. 45). L'intensité lumineuse aux pôles

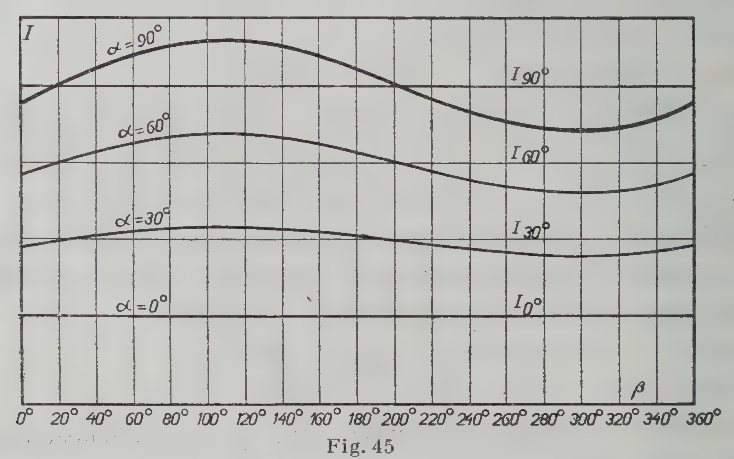


Fig. 45

étant indépendante de l'azimuth, les courbes relatives à

(1) Electr. t. LVI, 1905, p. 92.

$\alpha = 0^o$ et $\alpha = 180^o$ sont des droites horizontales. La courbe pour $\alpha = 90^o$ est relevée expérimentalement. Se basant alors sur le fait que l'intensité lumineuse varie graduellement le long des méridiens, Solomon détermine les courbes relatives aux latitudes intermédiaires par interpolation au juger. L'ordonnée moyenne de chacune des courbes ainsi obtenues donne alors la valeur de l'intensité à porter dans la courbe polaire moyenne.

Il est évident que sous cette forme ce procédé laisse une part trop large au hasard ; des maxima ou des minima d'intensité existant éventuellement entre l'équateur et les pôles ne sont pas pris en considération. Pour obtenir des résultats plus sûrs, il faudrait tout au moins augmenter le nombre de courbes relevées expérimentalement.

C'est ainsi que Pécheux (1) supprime même complètement toute interpolation, en relevant expérimentalement les courbes pour un grand nombre d'inclinaisons différentes. Accessoirement, comme la source lumineuse étudiée par lui présente des plans méridiens remarquables, non équidistants, il choisit ceux-ci pour faire ses mesures, de sorte qu'il obtient des points inégalement espacés en abscisse. Ce fait ne modifie cependant en rien la nature du procédé.

38) *Emploi du papier Fluxolite.*

Dans le cas de solides photométriques dépourvus de symétrie, Rousseau (2) divise ceux-ci en parties par des plans méridiens suffisamment rapprochés pour que l'on puisse assimiler la distribution azimuthale dans chaque dièdre à une distribution uniforme, qu'on traite ensuite comme s'il s'agissait d'un solide photométrique de révolution. En multipliant le résultat par un coefficient de proportionnalité

---

(1) R. G. E. t. XXIV, 1928, p. 402.
(2) Congr. Int. des El. 1882 (Paris), p. 140 des comptes rendus. Ing. Cons. t. V, 1882/83, p. 264.

convenable, on trouvera ensuite le flux réel relatif au dièdre considéré. L'opération répétée pour chaque dièdre fournit autant de flux lumineux partiels, dont la somme constitue le flux total cherché.

Wohlauer (1) applique cette méthode en se servant de son papier Fluxolite normal. Il considère n plans méridiens équidistants. Ceux-ci découpent dans le solide photométrique autant de courbes polaires, pour lesquelles il détermine les flux lumineux, comme s'il s'agissait de sources à distribution symétrique. La moyenne de ces résultats donne finalement le flux lumineux cherché.

39) *Généralisation.*

Il va sans dire que dans la méthode précédente l'emploi de tout autre procédé prévu pour le cas d'une distribution lumineuse symétrique, peut être substitué à celui du papier Fluxolite.

Pour étudier ce procédé à un point de vue plus général nous aurons encore recours aux solides photométriques théoriques qui ont fait l'objet du paragraphe 4, et que nous orienterons de manière à les rendre aussi dissymétriques que possible par rapport à l'axe de photométrie.

Considérons donc (fig. 46) un système d'axes trirectangles $Oxyz$. L'axe Oz sera pris comme axe de photométrie. L'axe de révolution des solides photométriques sera toujours confondu avec l'axe Ox. L'angle d'une direction quelconque par rapport à l'axe $\bar{O}z$ descendant, qui est l'axe de photométrie, sera comme précédemment désigné par α,

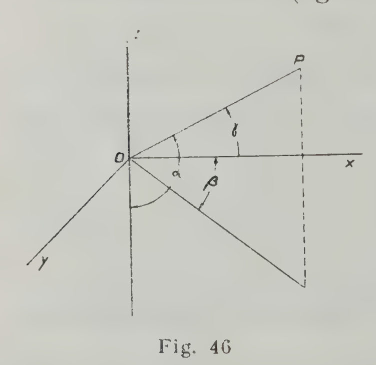


Fig. 46

(1) T. I. E. S. t. XXIII, 1928, p. 551.
L. u L. t. XVIII, 1929, p. 441

l'azimuth par rapport au plan xz par β. L'azimuth sera compté dans le sens horologique.

Nous ne devrons considérer de la courbe polaire déterminée sur le solide photométrique par chaque méridien, que la partie située d'un même côté de l'axe Oz. L'angle α sera donc toujours compris dans l'intervalle

$$0° \leq \alpha \leq 180°$$

tandis que l'azimuth β pourra avoir toutes les valeurs de 0° à 360°.

Cela étant, supposons une facette lumineuse plane de dimensions négligeables située en O dans le plan yz. Le solide photométrique est une sphère tangente à la facette lumineuse. Dans cette position du disque lumineux l'équation du solide photométrique s'écrit

$$I = I_m \sin \alpha \cos \beta.$$

Cette équation n'est valable que pour les valeurs de β comprises dans l'intervalle

$$-90° \leq \beta \leq 90°.$$

En donnant à β une valeur particulière déterminée β_1, telle que

$$0° \leq \beta_1 \leq 90°$$

on obtient une courbe polaire

$$I = I_m \cos \beta_1 \sin \alpha$$

à laquelle correspond un flux lumineux

$$\phi_1 = \pi^2 I_m \cos \beta_1$$

De même en donnant à β successivement les valeurs

$$\beta_2 = \beta_1 + 90°$$
$$\beta_3 = \beta_1 + 180°$$
$$\beta_4 = \beta_1 + 270°$$

on trouve pour le flux lumineux les trois nouvelles valeurs suivantes :

$$\phi_2 = 0$$
$$\phi_3 = 0$$
$$\phi_4 = \pi^2 I_m \sin \beta_1.$$

La moyenne $\emptyset_{\text{moy}}$ de ces quatre valeurs du flux lumineux est

$$\emptyset_{\text{moy}} = \frac{\pi^2 I_m}{4} (\cos \beta_1 + \sin \beta_1)$$

alors que la valeur réelle du flux total est donnée par l'expression

$$\emptyset = \pi I_m.$$

L'erreur relative commise en prenant la moyenne des flux lumineux correspondants aux courbes polaires dans quatre plans méridiens équidistants est donc de

$$r = \frac{\pi}{4} (\cos \beta_1 + \sin \beta_1).$$

Dans la figure 47 la courbe I représente cette fonction. La courbe II donne l'erreur commise en opérant sur huit plans méridiens équidistants.

Remplaçons maintenant la facette lumineuse en O par une demi-sphère, également de dimensions négligeables, et tournant son côté convexe dans la direction de l'axe Ox, qui sera son axe de symétrie. L'équation du solide photométrique s'écrit alors

$$I = I_m \frac{1 + \sin \alpha \cos \beta}{2}$$

Le flux lumineux correspondant à la courbe polaire obtenue en coupant ce solide photométrique par un plan méridien

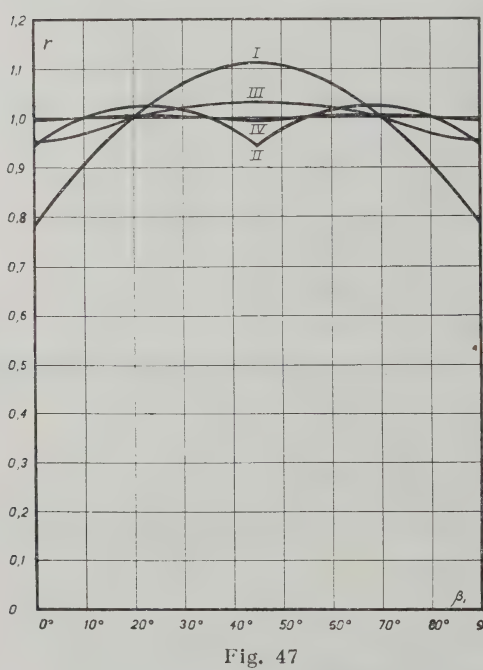


Fig. 47

quelconque a pour valeur

$$\phi_\beta = \pi \, I_m \int_o^\pi (1 + \sin \alpha \cos \beta) \sin \alpha \, d\alpha$$

En intégrant cette équation par rapport à α et en donnant ensuite à β les valeurs correspondant à quatre plans méridiens équidistants, on trouve pour ϕ les valeurs suivantes

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 2\pi \, I_m \left(1 + \frac{\pi}{4} \cos \beta_1\right) \\ \phi_2 &= 2\pi \, I_m \left(1 - \frac{\pi}{4} \sin \beta_1\right) \\ \phi_3 &= 2\pi \, I_m \left(1 - \frac{\pi}{4} \cos \beta_1\right) \\ \phi_4 &= 2\pi \, I_m \left(1 + \frac{\pi}{4} \sin \beta_1\right) \end{aligned} \qquad (45)$$

De ces valeurs on tire la moyenne

$$\phi_{\text{moy}} = 2\pi \, I_m = \phi_{\text{réel}}$$

Les expressions (45) montrent que dans le cas présent il suffit de considérer deux plans méridiens distants de 180° pour obtenir le flux lumineux réel.

Remplaçons enfin la demi-sphère lumineuse à son tour par un petit cylindre, toujours de dimensions négligeables, l'axe Ox étant aussi celui de ce cylindre. Le solide photométrique dans ce cas est un tore engendré par un cercle tangent à l'axe Ox au point O. L'équation qui le représente s'écrit

$$I = I_m \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta}.$$

Introduite dans l'équation du flux lumineux, cette expression de I conduit à une nouvelle équation de la forme

$$\phi = 4\pi \, I_m \int_o^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} \, \sin \alpha \, d\alpha \qquad (46)$$

qui donne la valeur du flux lumineux correspondant à la courbe polaire de chaque azimuth. On remarquera que nous

limitons l'intégrale à l'intervalle de 0 à $\frac{\pi}{2}$, doublant en même temps le coefficient qui la précède. Cet artifice, légitime à cause de la symétrie du solide photométrique par rapport au plan Oxy, est nécessaire pour permettre de poursuivre le calcul jusqu'à la fin.

L'intégration de cette équation n'étant pas aussi simple que celle des deux cas précédents, nous reproduirons le calcul avec quelques détails.

Posons

$$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta} = u \tag{47}$$

alors

$$\sin \alpha \, d\alpha = \frac{- u \, du}{\cos \alpha \cos^2 \beta} \tag{48}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{u^2 - \sin^2 \beta}}{\cos \beta} \tag{49}$$

En introduisant les expressions (47), (48), et (49) dans l'équation (46) il vient

$$\varnothing = \frac{- 4\pi \, I_m}{\cos \beta} \int_1^{\sin \beta} \frac{u^2 \, du}{\sqrt{u^2 - \sin^2 \beta}} \tag{50}$$

Posons encore

$$\sqrt{u^2 - \sin^2 \beta} = v - u$$

alors

$$u = \frac{v^2 + \sin^2 \beta}{2v}$$

$$\sqrt{u^2 - \sin^2 \beta} = \frac{v^2 - \sin^2 \beta}{2v}$$

$$du = \frac{v^2 - \sin^2 \beta}{2v^2} \, dv$$

Tenant compte de ces nouvelles expressions, l'équation (50) devient

$$\varnothing = \frac{- \pi \, I_m}{\cos \beta} \int_{1+\cos \beta}^{\sin \beta} \frac{(v^2 + \sin^2 \beta)^2}{v^3} \, dv$$

soit, tous calculs faits

$$\varnothing = 2\pi \, I_m \left[1 - \text{tg}\, \beta \sin \beta \, \text{l}_n \, \text{tg}\, \frac{\beta}{2} \right].$$

Le second membre de cette équation prend une forme indéterminée pour certaines valeurs de β. L'intervalle dans lequel la fonction nous intéresse est défini par la condition

$$0^o \leq \beta \leq 90^o.$$

L'indétermination qui a lieu pour $\beta = 0^o$ et pour $\beta = 90^o$, peut être levée par l'application de la règle de l'Hospital. On trouve respectivement

$$\text{pour } \beta = 0^o \qquad \phi = 2\pi\, I_m$$
$$\text{pour } \beta = 90^o \qquad \phi = 4\pi\, I_m.$$

Ces deux résultats pouvaient être prédits. En effet, pour $\beta = 0^o$ le solide photométrique fictif correspondant à la courbe polaire déterminée sur le solide photométrique réel, est celui d'un disque plan à deux faces lumineuses, tandis que pour $\beta = 90^o$ cette courbe est celle que donnerait une sphère lumineuse située au centre des coordonnées.

Déterminons maintenant la moyenne des flux lumineux correspondant aux courbes polaires dans quatre plans méridiens équidistants. Les plans des axes des coordonnées étant tous plans de symétrie du solide photométrique, on obtiendra le même résultat en ne considérant que deux plans distants de 90°, ou encore, sans sortir du premier quadrant, deux plans ayant des azimuths β_1 et β_2 complémentaires.

Dans la figure 47 le rapport r de cette moyenne au flux lumineux réel est représenté en fonction de β_1, par la courbe III. La courbe IV représente ce rapport dans le cas où l'on opère sur huit plans méridiens.

Remarques.

Nous croyons utile de faire remarquer ici que l'ordre des deux intégrations successives que suppose toujours la détermination du flux lumineux, est indifférent. Les procédés basés sur l'emploi d'une courbe polaire moyenne supposent l'intégration le long des parallèles effectuée la première. Celle-ci fournit pour chaque inclinaison l'intensité lumineuse moyenne correspondante

$$I'_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I \, d\beta.$$

Une seconde intégration le long des méridiens donne ensuite

$$\varnothing = 2\pi \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \sin \alpha \, d\alpha \, \frac{1}{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=2\pi} \mathrm{I} \, d\beta \, . \qquad (51)$$

Dans les procédés de ce paragraphe et des paragraphes immédiatement précédents au contraire, on a commencé par effectuer une intégration le long des méridiens donnant un flux fictif

$$\varnothing' = 2\pi \int_{o}^{\pi} \mathrm{I} \sin \alpha \, d\alpha$$

dont on déduit la valeur du flux lumineux réel par une nouvelle intégration le long des parallèles :

$$\varnothing = \frac{1}{2\pi} \int_{\beta=0}^{\beta=2\pi} d\beta \, 2\pi \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} \mathrm{I} \sin \alpha \, d\alpha. \qquad (52)$$

Les expressions (51) et (52) qui sont chacune le résultat de l'intégration de l'intensité lumineuse sur toute la sphère, sont identiques, ainsi que cela devait être.

En sacrifiant légèrement la précision à obtenir, ou dans les cas pratiques inaccessibles au calcul rigoureux, on peut évidemment remplacer une intégrale par une somme à nombre de termes fini. C'est ce qui a été fait dans ces paragraphes en ce qui concerne le nombre de plans méridiens. Par conséquent ce procédé est parfaitement sain. Le nombre de ces plans n'affecte donc que la précision du résultat.

Nous avons vu que, sauf dans le cas d'une très forte dissymétrie, celui du disque lumineux, quatre plans méridiens équidistants ne donnent qu'une erreur relativement faible, ne dépassant pas 10 % dans les circonstances les plus défavorables.

Pour le cas du disque lumineux il suffit d'ailleurs de porter ce nombre au double, pour ramener l'erreur commise dans des limites beaucoup plus étroites (courbe II de la fig. 47). Comme on n'a pratiquement jamais affaire à des distri-

butions lumineuses aussi dépourvues de symétrie, puisqu'on peut presque toujours les orienter de façon à atténuer autant que possible cette dissymétrie, on peut en conclure qu'en général il ne sera pas nécessaire de faire des observations dans un grand nombre de plans méridiens. Il serait donc absolument exagéré d'exiger que ces plans ne soient distants que de 10° seulement, par exemple.

Aux considérations qui précèdent on peut rattacher l'étude d'un procédé expéditif indiqué par Bloch (1), et qui consiste à multiplier le flux lumineux correspondant à la courbe polaire dans un plan méridien déterminé, par un coefficient de réduction, pour l'établissement duquel Bloch procède de la façon suivante. En opérant sur un nombre de termes plus ou moins grand, quatre en définitive, il détermine l'intensité lumineuse moyenne pour deux inclinaisons : 45° et 90°. (Il s'agissait de l'hémisphère inférieur seulement. Pour étendre le procédé aux deux hémisphères, il faudrait ajouter à ces deux inclinaisons celle de 135°.) Le rapport de ces intensités lumineuses moyennes aux intensités correspondant aux mêmes inclinaisons dans le plan méridien où la courbe polaire a été relevée, constitue un premier coefficient de réduction relatif à chacune de ces inclinaisons. Or, dans l'unique exemple traité par Bloch ces deux coefficients diffèrent assez peu l'un de l'autre, circonstance dont cet auteur conclut que leur moyenne doit être pratiquement valable pour toutes les inclinaisons. Or, nous savons qu'il n'en est pas ainsi. Nous avons même vu que le procédé de Solomon était basé sur le fait que ce coefficient tend vers l'unité lorsqu'on s'éloigne de l'équateur, pour atteindre effectivement cette valeur aux pôles. L'emploi de ce coefficient de réduction ne se justifie donc pas.

Halbertsma (2) se pose la question de savoir si, d'une façon générale, on pourrait remplacer le coefficient de réduction de Bloch par un autre, qui serait p. ex. le rapport de

---

(1) E. T. Z. t. XXVI, 1905, p. 646.
(2) Hel. t. XXII, 1916, p. 332.

l'intensité lumineuse moyenne horizontale à l'intensité lumineuse horizontale dans le plan méridien pour lequel on relève la courbe polaire complète. Il énonce la conclusion que ce procédé n'est légitime que si les courbes polaires pour tous les azimuths sont semblables.

Examinons cette conclusion de plus près. Pour que toutes les sections dans le solide photométrique par les plans méridiens soient semblables, il faut que l'intensité lumineuse soit représentée par une équation de la forme

$$I = f_1(\alpha) . f_2(\beta). \qquad (53)$$

Toutefois comme l'intensité lumineuse est nécessairement unique dans la direction des verticales ascendante et descendante, il faut, pour qu'il n'y ait pas incompatibilité avec l'équation (53) que l'une au moins des conditions suivantes soit remplie :

$$f_1(0) = f_1(\pi) = 0$$
$$f_2(\beta) \equiv 1.$$

La première de celles-ci exprime que l'intensité lumineuse suivant les deux directions verticales est nulle ; l'autre que le facteur de similitude des sections du solide photométrique est identiquement égal à l'unité, c. à d. que ce solide est de révolution.

Pour que l'intensité lumineuse soit unique et déterminée dans chaque direction, il faut en outre que les deux fonctions $f_1(\alpha)$ et $f_2(\beta)$ soient continues et prennent une valeur unique pour chaque valeur de la variable indépendante. Si l'on ne convient pas de ne pas faire sortir β de l'intervalle

$$0 \leq \beta \leq 2\pi$$

il faudra enfin que

$$f_2(\beta) = f_2(\beta + 2\pi)$$

condition exprimant la périodicité de la fonction $f_2(\beta)$. Dans le cas contraire, pour que la surface se ferme, il faudra que

$$f_2(0) = f_2(2\pi).$$

En dernier lieu, la fonction (53) ne devra prendre une

forme indéterminée pour aucun système de valeurs de α et de β dans l'intervalle où la fonction nous intéresse.

Cela étant, l'intensité lumineuse moyenne pour l'inclinaison α_1 est représentée par l'expression

$$I'_{\alpha_1} = \frac{f_1(\alpha_1)}{2\pi} \int_o^{2\pi} f_2(\beta)\, d\beta.$$

Supposons d'autre part que la courbe polaire complète ait été déterminée pour $\beta = \beta_o$. Dans ces conditions le coefficient de réduction pour l'inclinaison α_1, devient

$$k_{\alpha_1} = \frac{A\, f_1(\alpha_1)}{2\pi\, f_1(\alpha_1) . f_2(\beta_o)} = \frac{A}{2\pi\, f_2(\beta_o)} = k$$

en posant

$$\int_o^{2\pi} f_2(\beta)\, d\beta = A.$$

Si la condition de Halbertsma est satisfaite, le coefficient de réduction est donc le même pour toutes les inclinaisons. Par conséquent on pourra déterminer ce coefficient pour une inclinaison quelconque. Répétons enfin que, en excluant le cas de symétrie complète par rapport à l'axe de photométrie, la condition de Halbertsma suppose implicitement que l'intensité lumineuse est nulle suivant la verticale.

VII. — **Procédés analytiques.**

a) *Distribution lumineuse symétrique.*

40) *Formule de Voit.*

Parmi les premières formules publiées pour la détermination du flux lumineux des sources de distribution symétrique, il convient de citer celle de Voit (1). Celle-ci n'est autre que notre formule (3), dans laquelle I_{kl} serait remplacé par la moyenne arithmétique de I_k et I_l, c. à d. qu'on pose

$$\phi_{kl} = 2\pi \frac{I_k + I_l}{2} (\cos \alpha_k - \cos \alpha_l)$$

soit pour le flux lumineux total

$$\phi = \pi \Sigma\, (I_k + I_l)(\cos \alpha_k - \cos \alpha_l).$$

---

(1) Liebenthal, Lehrbuch, p. 276.

Après avoir effectué tous les calculs, cette formule se réduit à une expression de la forme

$$\phi = \Sigma K_\alpha I_\alpha. \qquad (54)$$

Le tableau XII donne les coefficients entrant dans cette formule, pour le cas habituel, où I est mesuré de 10° et 10°.

α	K_α	α
0°	0,0477	180°
10°	0,1895	170°
20°	0,3732	160°
30°	0,5456	150°
40°	0,7014	140°
50°	0,8358	130°
60°	0,9449	120°
70°	1,0253	110°
80°	1,0745	100°
90°	1,0911	90°

Tableau XII. Coefficients de la formule de Voit, pour $\Delta\alpha = 10°$.

Ce procédé n'équivaut pas, comme le voudraient Palaz-Patterson (1) à remplacer la courbe méridienne réelle du solide photométrique par un polygône inscrit ayant pour sommets les points de la courbe effectivement relevés et dont les intensités lumineuses correspondantes sont introduites dans la formule (54). Le procédé revient en fait à remplacer l'aire du diagramme d'Allard par celle d'une figure inscrite composée de trapèzes rectangles dont les bases sont déterminées par la hauteur des zones d'égale ouverture sur l'emploi desquelles la méthode est basée et dont les côtés parallèles ne sont autres que les vecteurs représentant les intensités lumineuses utilisées dans la formule ci-dessus.

(1) A Treatrise on Industrial Photometry, New-York, 2me édition, 1896, p. 23. (traduction par Patterson du livre déjà cité de Palaz).

41) *Méthode de l'Université de Michigan.*

Dans le livre de Palaz-Patterson (1) on trouve encore la méthode suivante, employée à l'époque au laboratoire de physique de l'université de Michigan.

Considérons une série de n élévations équidistantes comprenant les pôles et l'équateur, (n étant donc impair). On détermine l'intensité lumineuse moyenne pour les élévations de rang impair, celles de rang pair servant à délimiter les zones. Dans ces conditions l'intensité lumineuse étant mesurée de 10° en 10°, c. à d. pour $n=37$, on écrit pour le flux lumineux l'expression suivante

$$\phi = 2\pi\,[(I_{0^\circ} + I_{180^\circ})(\cos 0^\circ - \cos 5^\circ) + (I_{10^\circ} + I_{170^\circ})(\cos 5^\circ - \cos 15^\circ) + \cdots\cdots + 2\,I_{90^\circ}\cos 85^\circ]. \qquad (55)$$

Tous calculs faits, cette expression se réduit à une formule analogue à la formule (54), mais où les coefficients sont remplacés par ceux du tableau XIII.

α	K_α	α
0°	0,0239	180°
10°	0,1901	170°
20°	0,3746	160°
30°	0,5476	150°
40°	0,7040	140°
50°	0,8390	130°
60°	0,9485	120°
70°	1,0292	110°
80°	1,0786	100°
90°	1,0953	90°

Tableau XIII. Coefficients de la formule (54) modifiée, pour $\Delta\alpha = 10°$.

(1) Treatise, p. 23.

Une remarque s'impose ici, le premier terme de l'équation (55) n'étant pas conforme à la formule (3). En effet, pour ce terme, au lieu de l'intensité lumineuse I_{kl} ou $I_{(kl)}$ relative à la zone considérée, on introduit l'intensité lumineuse verticale. Mais une zone comprenant un pôle est une calotte sphérique et l'intensité lumineuse dans la direction du pôle n'est autre que celle qui règne dans la direction de l'axe de l'angle solide au centre déterminé par cette calotte. On ne commet donc pas d'erreur de principe en procédant comme ci-dessus. Toutefois, I_{kl} ou $I_{(kl)}$ donneraient de meilleures valeurs pour le premier terme de l'équation (55).

En comparant cette méthode à la précédente, on constate que les coefficients de la méthode actuelle sont systématiquement supérieurs à ceux de la formule de Voit, à l'exception du premier. La méthode de Voit donnera donc dans la généralité des cas des résultats inférieurs à ceux des autres méthodes décrites.

Le procédé publié plus tard en Europe par Wild (1) est en tous points identique à celui que nous venons d'exposer.

Enfin, Bloch (2) fait usage d'une méthode qu'il dit être une modification de celle que nous venons d'étudier, mais qui n'est en fait qu'un procédé empirique. Considérant que le poids d'une intensité lumineuse moyenne dans la détermination de la moyenne sphérique est d'autant plus grand que la direction de celle-ci se rapproche davantage de l'horizontale, il néglige les intensités lumineuses dans la direction de la verticale, et attribue au contraire un coefficient d'importance supérieur à l'unité aux intensités relatives aux directions voisines de l'horizontale. Ainsi on peut écrire

$$\emptyset = \frac{\pi}{2}[I_{30^\circ} + 2\, I_{60^\circ} + 2\, I_{90^\circ} + 2\, I_{120^\circ} + I_{150^\circ}]$$

(1) Electr. t. LV, 1905, p. 936.
(2) Grundzüge, p. 21.
Ill. Eng. (Lnd). t. II, 1909, p. 687.

en mesurant I de 30° en 30°. Cependant au lieu de 2 $I_{90°}$, Bloch introduit dans sa formule $I_{80°} + I_{100°}$, de sorte que celle-ci devient

$$\emptyset = \frac{\pi}{2}[I_{30°} + 2\,I_{60°} + I_{80°} + I_{100°} + 2\,I_{120°} + I_{150°}]\,.$$

42) *Tables de Bloch.*

Nous avons vu au paragraphe 14 comment les courbes intégrales de Bloch ont été obtenues. Cet auteur a aussi composé des tables numériques (1) traduisant ces courbes et les remplaçant chaque fois qu'une grande précision n'est pas requise ou que le temps fait défaut pour construire un diagramme. Ces tables ont été calculées par Bloch pour plusieurs courbes polaires types. Le recours à ces tables ne peut jamais donner qu'une idée approximative du résultat réel. Nous ne les mentionnons qu'à titre documentaire.

43) *Méthodes par développement en série de l'équation de la courbe polaire.*

Plusieurs auteurs ont voulu représenter la courbe polaire expérimentale par une équation exacte, afin de rendre autant que possible tous les cas de la pratique accessibles au calcul rigoureux.

Rousseau (2) avait proposé de caractériser les sources de lumière par une « formule photométrique », c. à d. par « la relation existant entre l'intensité lumineuse et la direction des rayons ». En définitive il entend par cette formule l'équation de la surface photométrique, lieu des extrémités des vecteurs-intensité.

Passant à l'application pratique de cette idée, il se borne à considérer des solides photométriques de révolution (3).

(1) Grundzüge, pp. 46 et 137-157.
(2) Congr. int. des El. 1881, (Paris), p. 336.
(3) id. 1882, p. 139.
Ing. Cons. t. V, 1882/83, p. 262.

La courbe polaire étant représentée par la fonction

$$I = f(\alpha)$$

il développe celle-ci en une série de la forme

$$f(\alpha) = a + b \cos \alpha + c \cos^2 \alpha + d \cos^3 \alpha + \cdots\cdots$$

dans laquelle les coefficients doivent être déterminés de manière à satisfaire aux résultats expérimentaux. Il en résulte pour le flux lumineux la formule

$$\Big[\varnothing\Big]_o^\pi = 2\pi \left[a\,(1 - \cos \alpha) + \frac{b}{2}(1 - \cos^2 \alpha) + \frac{c}{3}(1 - \cos^3 \alpha) + \cdots\cdots\right].$$

Pour $\alpha = 90^o$ et $\alpha = 180^o$ cette dernière formule conduit respectivement aux expressions

$$\varnothing_o = 2\pi \left[a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \cdots\cdots\right]$$

$$\varnothing_o = 4\pi \left[a + \frac{c}{3} + \cdots\cdots\cdots\right].$$

De nombreuses autres formules plus ou moins compliquées et valables dans des intervalles plus ou moins étendus de α ont été imaginées par Rousseau et par d'autres auteurs. Nous n'en parlerons pas, ces formules ne présentant plus aujourd'hui aucun intérêt.

Ondracek (1), en s'inspirant d'une méthode employée par Planck (2) fait usage des séries de Fourrier et décompose ainsi virtuellement une source lumineuse quelconque en une série de sources partielles simples superposées, qu'on pourrait qualifier d'harmoniques.

Soit

$$I = f(\alpha)$$

l'équation représentant la distribution lumineuse de la source à étudier. La théorie des séries de Fourrier permet d'écrire

(1) E. u. M. t. XXXVI, 1918, p. 77.

(2) Vorlesungen über Wärmestrahlung, Leipzig, 1906.

cette équation sous la forme

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\cos k\alpha \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha + \right.$$

$$\left. + \sin k\alpha \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha\right] \qquad (56)$$

dans laquelle

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi.$$

Mais, puisque nous supposons une distribution lumineuse symétrique,

$$f(\alpha) = f(-\alpha)$$

de sorte que les coefficients des termes en sin $k\alpha$ s'annulent. D'autre part, en raison également de la symétrie, on a aussi

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,d\alpha = 2\int_{0}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha = 2\int_{0}^{\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha.$$

L'équation (56) peut donc finalement se mettre sous la forme

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\cos k\alpha \int_{0}^{\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha$$

ou, d'une façon plus abrégée

$$I = I_0 + I_1\cos\alpha + I_2\cos 2\alpha + \cdots\cdots + I_k\cos k\alpha + \cdots \qquad (57)$$

où

$$\left.\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha \\ I_k &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Toute courbe polaire donnée peut donc être caractérisée complètement par les coefficients (58), qu'il faut déterminer dans chaque cas particulier.

Dans l'idée de l'auteur de la méthode, celle-ci doit servir

avant tout à une analyse serrée de la distribution lumineuse et aux modifications que les divers accessoires y apportent.

Cette analyse sortant du cadre assigné au présent travail, nous ne nous en occuperons pas, mais nous appliquerons l'équation (57) à la détermination du flux lumineux total représenté par cette équation.

D'une façon générale ce flux est donné par l'expression

$$\phi = 2\pi \int_o^\pi \mathrm{I} \sin\alpha \, d\alpha$$

c. à d., en remplaçant I par sa valeur (57),

$$\phi = 2\pi \int_o^\pi \mathrm{I}_0 \sin\alpha \, d\alpha + 2\pi \sum_{k=1}^{k=\infty} \int_o^\pi \mathrm{I}_k \cos k\alpha \sin\alpha \, d\alpha. \quad (59)$$

L'intégrale du premier terme du second membre est immédiate. Celles réunies sous le signe sommatoire se calculent facilement. En effet

$$\int_o^\pi \cos k\alpha \sin\alpha \, d\alpha = \left[-\frac{\cos(k+1)\alpha}{2(k+1)} - \frac{\cos(1-k)\alpha}{2(1-k)} \right]_o^\pi = \frac{\cos k\pi + 1}{1-k^2}.$$

Cette expression s'annule lorsque k est impair, tandis que pour k pair, elle devient

$$\frac{2}{1-k^2}.$$

Le flux représenté par l'équation (59) devient donc finalement

$$\phi = 4\pi \left[\mathrm{I}_0 + \sum_{k=2}^{k=\infty} \frac{\mathrm{I}_k}{1-k^2} \right]$$

expression dans laquelle k ne prend que des valeurs paires, et qui peut aussi s'écrire de la manière suivante

$$\phi = 4\pi \left[\mathrm{I}_0 - \frac{\mathrm{I}_2}{3} - \frac{\mathrm{I}_4}{15} - \frac{\mathrm{I}_6}{35} - \cdots\cdots - \frac{\mathrm{I}_k}{k^2-1} \cdots\cdots \right] \quad (60)$$

Il nous reste à déterminer la valeur des coefficients I figurant dans cette équation. Deux moyens se présentent.

Détermination des coefficients I_k.

a) *par les expressions* (58).

Divisons l'angle π en n parties égales, et soit I_p l'intensité lumineuse dans la direction bissectrice de l'un quelconque de ces angles partiels. Nous pouvons alors mettre l'expression (58) sous la forme

$$I_0 = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{p=1}^{p=n} I_p = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n} I_p$$

qui donne donc une valeur approchée de I_0, que l'on peut déterminer directement à l'aide de la courbe polaire donnée.

La seconde des expressions (58) peut de même se mettre sous la forme approchée suivante

$$I_k = \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{p=1}^{p=n} I_p \cos k\alpha = \frac{2}{n}\sum_{p=1}^{p=n} I_p \cos k\alpha.$$

Pour l'application pratique de cette formule, il est commode de se servir du tableau XIV, dans lequel figurent les valeurs de $\cos k\alpha$ pour toutes les valeurs intéressantes de k et de α. On a pris $n = 18$, c. à d. que la subdivision angulaire se fait en angles de 10°.

α	$\cos 2\alpha$	$\cos 4\alpha$	$\cos 6\alpha$	$\cos 8\alpha$	$\cos 10\alpha$	α
5°	0,985	0,940	0,866	0,766	0,643	175°
15°	0,866	0,500	0	— 0,500	— 0,866	165°
25°	0,643	— 0,174	— 0,866	— 0,940	— 0,342	155°
35°	0,342	— 0,766	— 0,866	0,174	0,985	145°
45°	0	— 1	0	1	0	135°
55°	— 0,342	— 0,766	0,866	0,174	— 0,985	125°
65°	— 0,643	— 0,174	0,866	— 0,940	0,342	115°
75°	— 0,866	0,500	0	— 0,500	0,866	105°
85°	— 0,985	0,940	— 0,866	0,766	— 0,643	95°

Tableau XIV. Valeurs de $\cos k\alpha$.

On se sert de ce tableau en multipliant les nombres de chaque ligne par l'intensité lumineuse correspondante, lue sur la courbe polaire. Ensuite on fait la somme par colonnes des produits ainsi obtenus et on multiplie ces sommes par $\frac{2}{n}$, c. à d., puisque $n=18$, qu'on les divise par 9. Les nombres ainsi obtenus sont les coefficients I_2, I_4, I_6, I_8 et I_{10}.

b) *par l'équation* (57).

La série (60) étant rapidement décroissante, nous nous contenterons de déterminer les coefficients I_0, I_2, I_4 et I_6.

L'équation (57) permet d'écrire le système d'équations linéaires suivant, où les coefficients cherchés figurent comme inconnues, tandis qu'il faudra en même temps en éliminer I_1, I_3 et I_5.

$$\begin{aligned}
I_{0^\circ} &= I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 \\
I_{30^\circ} &= I_0 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, I_1 + \tfrac{1}{2} I_2 - \tfrac{1}{2} I_4 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, I_5 - I_6 \\
I_{60^\circ} &= I_0 + \tfrac{1}{2} I_1 - \tfrac{1}{2} I_2 - I_3 - \tfrac{1}{2} I_4 + \tfrac{1}{2} I_5 + I_6 \\
I_{90^\circ} &= I_0 - I_2 + I_4 - I_6 \\
I_{120^\circ} &= I_0 - \tfrac{1}{2} I_1 - \tfrac{1}{2} I_2 + I_3 - \tfrac{1}{2} I_4 - \tfrac{1}{2} I_5 - I_6 \\
I_{150^\circ} &= I_0 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, I_1 + \tfrac{1}{2} I_2 - \tfrac{1}{2} I_4 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, I_5 - I_6 \\
I_{180^\circ} &= I_0 - I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 + I_6 .
\end{aligned}$$

De ce système on déduit la solution suivante :

$$\left.\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1}{8}\left[I_{0^\circ} + 2\, I_{30^\circ} + 2\, I_{60^\circ} + 2\, I_{90^\circ} + 2\, I_{120^\circ} + 2\, I_{150^\circ} + I_{180^\circ}\right] \\
I_2 &= \frac{1}{6}\left[I_{0^\circ} + I_{30^\circ} - I_{60^\circ} - 2\, I_{90^\circ} - I_{120^\circ} + I_{150^\circ} + I_{180^\circ}\right] \\
I_4 &= \frac{1}{6}\left[I_{0^\circ} - I_{30^\circ} - I_{60^\circ} + 2\, I_{90^\circ} - I_{120^\circ} - I_{150^\circ} + I_{180^\circ}\right] \\
I_6 &= \frac{1}{12}\left[I_{0^\circ} - 2\, I_{30^\circ} + 2\, I_{60^\circ} - 2\, I_{90^\circ} + 2\, I_{120^\circ} - I_{150^\circ} + I_{180^\circ}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (61)$$

Ainsi, pour déterminer les quatre coefficients qui nous intéressent, il faut et il suffit de connaître l'intensité lumineuse moyenne dans sept directions différentes (nous sommes partis

d'un système de 7 équations linéaires à 7 inconnues, dont 4 seulement nous intéressaient directement).

En introduisant les valeurs (61) dans l'équation (60), celle-ci prend en définitive la forme

$$\phi = 0{,}703\,(I_{0^\circ} + I_{180^\circ}) + 2{,}643\,(I_{30^\circ} + I_{150^\circ}) + \\ + 3{,}919\,(I_{60^\circ} + I_{120^\circ}) + 4{,}319\,I_{90^\circ}.$$

Nous sommes donc encore ramenés à une formule donnant le flux lumineux sous forme d'une somme de termes constitués par des intensités déterminées multipliées par des coefficients. La détermination de ces coefficients est cependant assez compliquée, de sorte qu'on n'aura en général recours à ce procédé que lorsqu'on l'applique en même temps à l'analyse de la courbe polaire et des modifications que celle-ci peut subir. On est d'ailleurs maître de déterminer ces coefficients avec telle exactitude qu'on voudra, celle-ci variant dans le même sens que leur nombre.

44) *Faisceaux lumineux étroits.*

Dans le cas de faisceaux lumineux étroits, tels que ceux produits par les projecteurs par exemple, les méthodes décrites pour la détermination du flux lumineux cessent d'être pratiquement applicables, en raison de la petitesse des angles auxquels on a affaire. On est alors obligé d'opérer par le calcul.

En basant les calculs sur la méthode des zones de même hauteur, on est amené à considérer des intensités lumineuses de même poids, dans des directions de plus en plus rapprochées lorsqu'on s'éloigne de la verticale. On décompose donc alors le flux lumineux total en une suite de termes de deux facteurs, dont l'un, l'angle solide, est constant, et dont l'autre, l'intensité lumineuse, va rapidement en décroissant à mesure que l'on s'éloigne de la verticale. Dans ces conditions les intensités lumineuses les plus faibles interviennent surtout dans le calcul, aux dépens des intensités les plus

fortes. La question se pose donc de savoir s'il ne serait pas préférable dans ce cas de recourir à la méthode des zones d'ouverture constante, dans laquelle on considère des intensités lumineuses équidistantes, accompagnées de facteurs d'importance appropriés. L'angle solide entrant comme facteur dans les termes du flux va en augmentant lorsqu'on s'éloigne de la verticale, tandis que l'intensité lumineuse, deuxième facteur, va en décroissant dans ces mêmes conditions. Il est donc impossible de rien prédire au sujet de l'importance relative de ces termes.

Pour nous rendre compte de la valeur relative des deux points de vue en présence, nous appliquerons chacune des deux méthodes à une courbe polaire hypothétique

$$I = I_m \cos p\alpha$$

dont nous ne considérons que la première demi-boucle comprise entre les limites 0 et α_1, telles que

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2p} .$$

L'angle β de notre formule (22) prend ici la valeur $\frac{\pi}{2p}$.

Pour appliquer la méthode des zones de hauteur constante, il faut donc considérer l'intensité lumineuse sous les angles dont les cosinus ont la valeur

$$1 - (2k - 1) \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2p}}{2n} \qquad (62)$$

où k prend successivement toutes les valeurs de 1 à n.

La moyenne de ces n intensités lumineuses multipliée par l'angle solide occupé par le faisceau, donne le flux lumineux cherché. On trouve facilement que cet angle solide a pour valeur

$$\omega = 4\pi \sin^2 \frac{\pi}{4p} .$$

En posant

$$p = 18$$

le faisceau a une ouverture de 10°. Nous poserons en outre successivement $n=10$ et $n=5$. L'expression (62) donne alors

pour les angles sous lesquels il faut déterminer l'intensité lumineuse, les valeurs suivantes

k	$n = 10$	$n = 5$
1	1° 7′ 4″	1° 34′ 51″
2	1° 56′ 10″	2° 44′ 17″
3	2° 29′ 58″	3° 32′ 6″
4	2° 57′ 27″	4° 10′ 59″
5	3° 21′ 13″	4° 44′ 36″
6	3° 42′ 27″	
7	4° 1′ 51″	
8	4° 19′ 48″	
9	4° 36′ 35″	
10	4° 52′ 24″	

Tableau XV. Angles dont les cosinus forment la série (62).

Le tableau XVI indique les résultats obtenus par l'application de cette méthode.

	$n = 10$	$n = 5$
Flux lumineux théorique exact	0,011 065 I_m	0,011 065 I_m
$\frac{\omega}{n} \Sigma I_{(kl)}$	0,011 070 I_m	0,011 057 I_m
Erreur relative méthodique	+ 0,045 %	— 0,072 %

Tableau XVI. Résultats de l'application de la méthode des zones de hauteur constante à la courbe $I = I_m \cos 18\alpha$.

Les résultats que donne la méthode des zones d'ouverture constante sont consignés dans le tableau suivant, également pour 10 et 5 zones.

	$n = 10$	$n = 5$
Flux lumineux théorique exact	0,011 065 I_m	0,011 065 I_m
$\Sigma\, I_{kl}\, \omega_{kl}$	0,011 116 I_m	0,011 271 I_m
Erreur relative méthodique	+ 0,46 %	+ 1,9 %

Tableau XVII. Résultats de l'application de la méthode des zones d'ouverture constante à la courbe $I = I_m \cos 18\,\alpha$.

Le flux lumineux théorique a été déterminé par la formule (1) qui prend ici la forme

$$\emptyset = 2\pi\, I_m \int_0^{\frac{\pi}{2p}} \cos p\alpha \sin \alpha \, d\alpha.$$

On remarque que la première méthode donne chaque fois des erreurs négligeables. Il n'en est pas de même pour la seconde. On peut attribuer cette circonstance au fait que dans la dernière méthode on considère des intensités I_{kl} décalées vers l'axe par rapport aux $I_{(kl)}$ et donc plus grandes que celles-ci.

Cependant, lorsqu'il faut d'abord déterminer par le calcul les directions $\alpha_{(kl)}$ intervenant dans la première méthode, il faudra en général renoncer à l'emploi de celle-ci, la détermination de ces directions étant trop longue pour la pratique. Pour l'application il faudra donc disposer de tableaux préétablis tel que le tableau XV relatif au cas que nous avons considéré.

Il n'en est pas de même des constantes intervenant dans

la deuxième méthode que l'on peut déterminer beaucoup plus rapidement à l'aide de la formule

$$\omega_{kl} = 4\pi \sin \frac{\alpha_l - \alpha_k}{2} \sin \alpha_{kl}$$

où

$$4\pi \sin \frac{\alpha_l - \alpha_k}{2}$$

est une constante.

Des tableaux de ces constantes ont été publiés par Rose (1). A titre d'exemple nous reproduisons, en le complétant quant au nombre de chiffres significatifs, celui relatif au cas que nous avons étudié.

α_{kl}	Limites de la zone		Constante du flux
	α_k	α_l	
0° 15′	0°	0° 30′	0,000 239 3
0° 45′	0° 30′	1°	0,000 717 7
1° 15′	1°	1° 30′	0,001 196 1
1° 45′	1° 30′	2°	0,001 674 5
2° 15′	2°	2° 30′	0,002 152 7
2° 45′	2° 30′	3°	0,002 630 7
3° 15′	3°	3° 30′	0,003 108 6
3° 45′	3° 30′	4°	0,003 586 2
4° 15′	4°	4° 30′	0,004 063 5
4° 45′	4° 30′	5°	0,004 540 4

Tableau XVIII. Constantes pour la détermination du flux lumineux de faisceaux de 10° d'ouverture.

(1) G. E. R. t. XX, 1917, p. 747.

Remarque au sujet du calcul des petits angles.

Dans les calculs il est très peu pratique de faire intervenir les petits angles par leur cosinus, celui-ci ne variant que très lentement pour ces angles. Nous avons donc déterminé les angles du tableau XV non par la formule (62), mais par leur sinus. On a en effet

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

d'où

$$\sin^2 \alpha = 2(2k - 1)\, A - (2k - 1)^2\, A^2$$

en posant

$$\frac{1 - \cos \frac{\pi}{2p}}{2n} = A.$$

De cette manière, en se servant d'une table de logarithmes à 5 décimales, on obtient des résultats comportant 5 chiffres significatifs, tandis que par le cosinus on n'obtient que 5 décimales, dont les premières sont des zéros, c. à d. qu'on n'obtient qu'un nombre de chiffres significatifs restreint.

Pour la même raison nous avons déterminé les constantes du tableau XVIII en mettant ω_{kl} sous la forme d'un produit de sinus et non sous celle de la différence de deux cosinus.

b) *Distribution lumineuse asymétrique.*

45) *Quadrature par les méthodes de Gauss et de Tchebycheff.*

Au cours du chapitre II nous avons déjà étudié l'intégration du diagramme d'Allard au moyen de formules de quadrature. En vertu de la classification que nous avons adoptée, ces transpositions analytiques d'une méthode graphique auraient dû figurer au présent chapitre. Si néanmoins nous avons dérogé à cette règle, c'est que nous n'avons pas cru devoir séparer cette étude de celle de la méthode graphique correspondante.

Contrairement aux formules dont nous nous sommes

servis précédemment et qui supposaient toutes une subdivision en parties égales de la base du diagramme à intégrer, les méthodes dont nous allons nous occuper maintenant sont basées sur l'emploi d'ordonnées choisies de manière à rendre l'erreur commise minimum.

Soit à déterminer la moyenne d'une fonction dont nous supposerons qu'elle puisse être représentée, dans l'intervalle où elle nous intéresse et avec une approximation suffisante, par une fonction algébrique de degré n. Buckley (1) propose pour la détermination de cette moyenne, l'emploi des méthodes de quadrature de Gauss et de Tchebycheff. Celles-ci consistent à substituer à la moyenne vraie, celle des ordonnées connues auxquelles nous venons de faire allusion et qui sont accompagnées de coefficients d'importance différents dans le premier cas, égaux dans le second.

Lorsqu'on se sert de plans méridiens équidistants, il arrive fréquemment qu'on ne considère que quatre plans, pour lesquels on choisit alors volontiers des plans remarquables, un plan de symétrie et celui qui lui est perpendiculaire, par exemple. Or, un plan de symétrie contient toujours des intensités maxima ou minima. Le résultat trouvé dans ces conditions ne sera donc en général suffisamment exact, que si la loi de variation azimuthale est sensiblement linéaire, ce qui n'est pas généralement le cas. Au paragraphe 39 nous avons déjà vu d'ailleurs que l'erreur maximum correspond en effet toujours à des plans remarquables (voir figure 47). La difficulté réside donc principalement dans le choix des plans méridiens dans lesquels il convient d'opérer.

Au lieu de considérer des plans méridiens équidistants, comme nous l'avons fait précédemment, Buckley choisit des plans dont la répartition en azimuth est donnée par la méthode de Gauss ou celle de Tchebycheff. Dans la quadrature

---

(1) Ill. Eng. (Lnd). t. XVIII, 1925, p. 69.

en coordonnées rectangulaires, chacune de ces méthodes conduit à un nombre m d'abscisses réparties d'une certaine façon. Les ordonnées au droit de ces abscisses sont celles qui entrent dans le calcul. L'intégration que nous avons à effectuer est double, ainsi que nous l'avons vu précédemment. Comme les deux méthodes que nous envisageons sont des méthodes de quadrature simple, il faudra les adapter au problème particulier qui nous occupe. Buckley ne s'en sert tout d'abord que pour le choix des plans méridiens. Ceux-ci seront répartis en azimuth comme les ordonnées de Gauss ou de Tchebycheff en abscisse.

Il arrive souvent que des solides photométriques, sans être symétriques de révolution, peuvent être divisés, par des plans méridiens, en fuseaux sensiblement égaux ou symétriques. Dans ce cas on pourrait se contenter d'opérer sur un seul de ces fuseaux et multiplier le résultat trouvé par leur nombre. Cependant, comme il est exceptionnel qu'on puisse tabler sur une égalité ou une symétrie aussi parfaites que nous l'avons supposé et que le but poursuivi par Buckley est de réduire au minimum l'erreur commise, il tient compte de chacun des fuseaux déjà définis. Comme il importe d'autre part d'abréger autant que possible les opérations, il ne considère dans chaque dièdre qu'un seul des plans méridiens dont nous venons de parler, en ce sens, que si nous numérotons 1, 2, 3, etc. les plans dans un même dièdre, on ne considère dans un premier dièdre que le plan 1, dans le suivant le plan 2, etc. Cela suppose évidemment que le nombre m est égal au nombre de fuseaux. Il est évident d'autre part, que l'ordre dans lequel on associe les plans et les fuseaux est sans importance et qu'au lieu d'être égal au nombre de fuseaux, le nombre de plans pourrait en être un multiple.

A titre d'exemple, nous avons supposé dans la figure 48, le cas de deux plans de symétrie, divisant le solide photométrique, dont seule la section horizontale est représentée,

en quatre fuseaux, I, II, III et IV. Les plans méridiens considérés dans chaque dièdre sont numérotés de 1 à 4, la numérotation se correspondant dans les quatre dièdres. Les plans réellement utilisés, sont ceux marqués en traits forts.

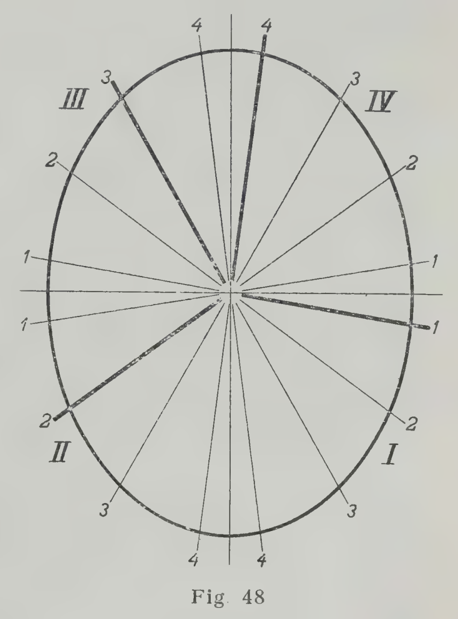


Fig. 48

Au paragraphe 39 nous avons vu en outre que l'ordre des deux intégrations nécessaires pour la détermination du flux lumineux, est quelconque. Ayant choisi maintenant les plans méridiens dans lesquels nous opèrerons, nous pourrions, par un procédé déjà étudié, déterminer le flux lumineux correspondant à la courbe polaire que chacun des plans méridiens découpe sur le solide photométrique. Il suffirait alors de faire la moyenne de ces résultats, en tenant compte, s'il y a lieu, des coefficients d'importance afférents aux plans méridiens correspondants. On pourrait notamment se servir d'un procédé basé sur l'emploi de zones de hauteur constante ou d'ouverture constante. Dans chacun de ces cas on a affaire, dans les divers plans méridiens, à des intensités lumineuses correspondant aux mêmes inclinaisons. On peut considérer que virtuellement l'intensité lumineuse moyenne sphérique est déterminée à l'aide de la courbe polaire moyenne, dont les rayons-vecteurs sont les moyennes de ces intensités lumineuses relatives aux mêmes inclinaisons, compte étant tenu des coefficients d'importance différents ou égaux, suivant qu'on se sert de la méthode de Gauss ou de celle de Tchebycheff. La méthode suivie dans ce paragraphe

se justifie donc parfaitement. Il était utile de se poser cette question, étant donné qu'il est étrange, a priori, d'opérer sur des plans méridiens non équidistants.

Au lieu de procéder dans les plans méridiens comme il vient d'être dit, on peut faire usage, là aussi, des méthodes de Gauss ou de Tchebycheff. Pour cela on divise l'axe de la sphère photométrique imaginaire proportionnellement aux abscisses propres à ces deux méthodes. Les plans menés par les points de division ainsi obtenus, perpendiculairement à cet axe, coupent la sphère photométrique suivant des parallèles qui donnent l'inclinaison des intensités à faire entrer dans le calcul. Cette façon de procéder revient à intégrer le diagramme d'Allard par une des deux méthodes en question.

Si la méthode employée donne des termes tous de même poids, c'est-à-dire quand les plans méridiens ont été choisis suivant la méthode de Tchebycheff et que la quadrature de la courbe polaire dans ces plans a lieu suivant une méthode basée sur l'emploi de zones de hauteur constante, Buckley réduit le nombre de mesures à faire au photomètre, en supprimant une grande partie de ces termes. Ayant tenu compte dans un plan, p. ex. des termes de rang pair, il ne considère dans le suivant que ceux de rang impair. Il est évident que cette manière de faire ne se justifie pas en théorie ainsi que Buckley le fait d'ailleurs remarquer lui-même. L'erreur commise de cette façon se réduit cependant à peu de chose, à condition que la forme des courbes polaires et la variation azimuthale ne soient pas trop irrégulières. D'une façon générale il est cependant préférable d'éviter cette erreur qu'il est impossible d'évaluer a priori.

Il va de soi que le même procédé pourrait être appliqué, avec la même restriction, si la courbe polaire était aussi intégrée par la méthode de Tchebycheff.

Quoique cette dernière méthode exige la connaissance d'un nombre d'ordonnées presque double de celles que néces-

site la méthode de Gauss, pour arriver à un résultat présentant le même degré d'approximation, et que la méthode de Gauss soit donc beaucoup plus précise que la première au point de vue théorique, la méthode de Tchebycheff mérite cependant la préférence pour les applications pratiques que nous voulons en faire. Cette supériorité pratique est la conséquence de l'égalité des coefficients d'importance dans la méthode de Tchebycheff. D'autre part il est tout à fait inutile de vouloir faire l'intégration avec un degré d'exactitude supérieur à celui réalisable dans la mesure des intensités lumineuses figurant dans les calculs.

Les deux méthodes ne peuvent d'ailleurs être appliquées pratiquement que si on dispose de tableaux donnant les angles et les constantes nécessaires à cette application, pour plusieurs valeurs du nombre m de termes considérés. On trouvera de ces tableaux chez Buckley (1) et chez Ziro Yamauti (2).

(46) *Méthode de Högner.*

Considérons (fig. 49) une source de lumière dont le centre occupe le point L sur l'axe $O\ L$ d'un système de coordonnées trirectangulaires $O\ L\ M\ N$. La distance $O\ L$ est prise comme unité. Högner (3) divise l'espace entourant cette source lumineuse, en angles solides partiels, ayant leur sommet commun en L. On peut se contenter d'étudier le seul octant déterminé par les axes $L\ M'$, $L\ N'$, respectivement parallèles à $O\ M$ et à $O\ N$, et $L\ O$, le problème étant le même pour les autres régions de l'espace. Par $L\ M'$ et $L\ N'$ menons des plans à des intervalles angulaires réguliers, 10° par exemple.

Par leurs intersections les plans de ces deux systèmes

(1) loc. cit. p. 95.

(2) Recueil des Travaux et Compte rendu des séances de la septième session de la Commission Internationale de l'Eclairage à Saranac Inn, N. Y., septembre 1928, pp. 425-418.

(3) E.T.Z. t. XXXI, 1910, p. 234.

déterminent les angles solides partiels cherchés. Cherchons une expression approchée pour la grandeur de ces angles.

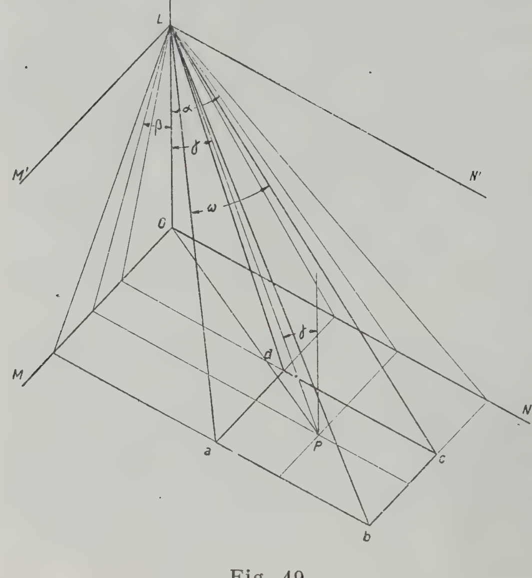


Fig. 49

Considérons parmi les plans passant par $L\,M'$ ceux faisant respectivement les angles dièdres $\alpha - 5^{o}$ et $\alpha + 5^{o}$ avec le plan OLM'. De même, parmi les plans passant par LN', considérons ceux faisant les angles dièdres $\beta - 5^{o}$ et $\beta + 5^{o}$ avec le plan $O\,L\,N'$. Ces quatre plans délimitent sur le plan $M\,O\,N$ un rectangle $a\,b\,c\,d$. A l'intérieur de celui-ci les traces des plans bissecteurs α et β déterminent la position d'un point P. Joignons L à P. On voit aisément, que l'angle γ, que font entre eux $L\,O$ et $L\,P$, est déterminé par la relation

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OL}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} \qquad (63)$$

Nous prendrons comme valeur approchée de l'angle solide $L\,a\,b\,c\,d$ la quantité

$$\omega = \frac{\mathrm{ab\,.\,ad}}{\overline{\mathrm{LP}}^2} \cos \gamma \qquad (64)$$

c'est-à-dire le quotient de l'aire $a\,b\,c\,d$, projetée sur un plan perpendiculaire à $L\,P$, par le carré de la distance $L\,P$. L'expression (64) peut se mettre sous la forme

$$\omega = \frac{[\operatorname{tg}(\alpha + 5^{o}) - \operatorname{tg}(\alpha - 5^{o})]\,[\operatorname{tg}(\beta + 5^{o}) - \operatorname{tg}(\beta - 5^{o})]}{\sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta)^3}} \qquad (65)$$

Pour obtenir le flux lumineux rayonné dans l'angle solide ω, Högner multiplie la grandeur de cet angle par l'intensité lumineuse dans la direction de son axe $L\,P$.

Il donne aussi un tableau numérique des valeurs des expressions (63) et (64) pour chacun des 81 angles solides partiels considérés. Il eût été plus pratique cependant de calculer l'angle γ lui-même, au lieu de sa tangente, la connaissance de cet angle étant nécessaire pour la recherche de l'intensité lumineuse à faire intervenir dans le calcul.

D'autre part il nous a été impossible de retrouver les valeurs de ω indiquées dans ce tableau, en appliquant la formule (65). Nous nous abstiendrons donc de reproduire ce tableau.

Il faut remarquer que la formule (65) cesse d'être applicable lorsque α et β, ou l'un de ces angles seulement, se rapprochent de 90°.

Or, la méthode a été imaginée en vue du calcul de l'éclairement produit sur le plan $M\,O\,N$. Les angles α et β intervenant alors dans le calcul ne dépassent guère certaines valeurs limites, d'ailleurs assez éloignées de 90°.

Pour les calculs d'éclairemnts cet inconvénient n'a donc que peu d'importance, mais il exclut l'emploi de la méthode lorsqu'on veut s'en servir pour le calcul du flux lumineux total d'une souree de lumière. Pour adapter la méthode à cette dernière application, sans en altérer la nature, il faudrait par exemple, placer la source à étudier au centre d'un cube, que l'on pourrait diviser en huit cubes partiels par des plans passant par L parallèlement aux faces du cube principal. Dans chacun de ces cubes partiels on pourrait diviser les trois faces opposées à L en carrés, par les droites parallèles aux arêtes, et considérer chacun de ces carrés comme la base d'une pyramide ayant son sommet en L. Ces pyramides renferment des angles solides, que l'on peut traiter comme ceux de Högner. Il suffirait de composer un tableau numérique relatif à une seule des faces des cubes partiels considérés.

VIII. — **Conclusion.**

Il n'est évidemment pas possible de donner une réponse unique à la question de savoir lequel des nombreux procédés que nous avons passés en revue, doit être préféré d'une façon générale, pour la détermination du flux lumineux des sources de lumière. Tout dépend en effet des circonstances particulières dans chaque cas.

Avant toute autre chose il faut se demander quelle est la nature de la source à étudier, c'est-à-dire si celle-ci est symétrique ou non, ou si elle présente d'autres caractéristiques qui la classent à part, tel qu'un faisceau concentré, par exemple.

Ensuite, dans beaucoup de cas, la marche à suivre dépendra des éléments de départ dont on dispose. Si l'on a à sa disposition la source elle-même et un photomètre permettant toutes les combinaisons voulues, on sera évidemment beaucoup plus libre dans le choix de la méthode à employer que lorsqu'on ne possède qu'une ou plusieurs courbes polaires, à une échelle plus ou moins grande, ou simplement un tableau de caractéristiques numériques.

D'autre part on peut se placer à plusieurs points de vue différents quant au but poursuivi. Ainsi, on peut chercher, en premier lieu, à *représenter* le flux lumineux et sa répartition, la *détermination* de sa valeur étant considérée comme accessoire. Nous avons vu que cette représentation peut être faite par une courbe, par une aire ou par un volume. La première méthode ne convient qu'au cas de symétrie parfaite. La courbe prend alors la figure d'une courbe intégrale, permettant de déterminer le flux dans un angle zonal quelconque par la différence de deux longueurs. Telles sont la courbe de Bloch en coordonnées rectangulaires et la troisième courbe de Pierce en coordonnées polaires. Les méthodes se servant

d'une aire ne conviennent aussi le plus souvent qu'aux distributions lumineuses symétriques. Tel est le cas des diagrammes d'Allard en coordonnées rectangulaires et de ceux de Gerhardt d'une part, et de Dispenza et de Matthews d'autre part, en coordonnées polaires. Cependant, nous avons vu que le diagramme de Weaver permet de représenter, grâce à un réseau de courbes tracées dans le diagramme d'Allard, dans le plan et d'une façon très pratique, la répartition complète d'une source quelconque de lumière. Quant aux méthodes se servant d'un volume, elles ne constituent guère que des possibilités théoriques plus ou moins intéressantes. Parmi elles il y a lieu de considérer celle de Herzog et Feldmann comme la plus satisfaisante, parce que se prêtant le mieux à la représentation par une figure claire en perspective. Elle présente en outre de l'intérêt en tant que généralisation du diagramme d'Allard.

Lorsqu'on cherche à connaître avant tout la *valeur* du flux lumineux, on a le choix entre un grand nombre de procédés exacts ou approchés, donnant ou non la répartition du flux en même temps que sa grandeur, procédés plus ou moins rapides et pratiques, opérant par le calcul ou s'aidant de constructions graphiques.

Il peut arriver aussi, qu'on détermine le flux lumineux en vue de constituer un abaque ou un tableau devant permettre par la suite de lire immédiatement, sans plus aucun calcul, la valeur du flux lumineux correspondant à un angle solide ou plan déterminé.

On peut enfin avoir en vue des applications particulières, telles que le calcul de l'éclairement sur une surface déterminée. On choisira alors la méthode qui s'adapte le mieux aux conditions du problème particulier que l'on traite.

Enfin, on pourra, selon le cas, se servir de divers accessoires, tels que papiers, rapporteurs, abaques, règles à graduations spéciales, règle à calcul spéciale, double décimètre,

ainsi que nous l'avons vu. Les auteurs des méthodes se servant de ces divers accessoires sont unanimes à vanter comme avantage tout à fait particulier de leurs méthodes respectives, que celles-ci dispensent d'avoir recours à tout accessoire, quel qu'il soit, en dehors de celui dont ils recommandent l'emploi. En fait, ces accessoires ne sont en général ni plus précis, ni plus rapides les uns que les autres, la précision du résultat dépendant essentiellement du soin avec lequel on opère.

A la suite des accessoires énumérés, on peut considérer les tableaux de constantes dont on se sert dans les méthodes analytiques, comportant un système de directions et, le cas échéant, de coefficients, si les intensités lumineuses dans ces diverses directions ne sont pas de poids égal.

IX. — **Addendum.**

Pour entreprendre l'étude qu'on vient de lire, nous avons dû réunir une documentation assez considérable, que nous avons pu nous procurer entièrement en original, à l'exception des travaux d'Allard, auxquels nous référons au no 6, et que nous avions cités d'après un autre auteur, lequel paraît d'ailleurs n'avoir pas eu, lui non plus, les originaux entre les mains. Toutefois, après la mise sous presse de la première partie de cette étude, nos recherches ont abouti à la découverte du premier de ces deux documents.

L'examen de celui-ci nous a montré que, contrairement au renseignement que nous avions emprunté à l'intermédiaire dont il vient d'être question, Allard n'y introduit nullement la notion d' « intensité lumineuse moyenne sphérique », dont l'origine paraît douteuse, mais bien celle de « quantité de lumière » (1). D'après la définition qu'il en donne, cette grandeur équivaut à ce que nous entendons aujourd'hui par « flux

(1) loc. cit. p. 23.

lumineux ». Le malentendu provient probablement du fait, qu'à cet endroit Allard tient compte, pour la première fois, de toute la lumière émise par une source lumineuse dans toutes les directions, alors qu'avant lui on avait l'habitude de ne considérer que l'intensité dans des directions déterminées, et tout au plus la moyenne de cette grandeur dans le plan horizontal, sans jamais se préoccuper de la lumière rayonnée dans les autres directions. L'auteur en question, en parlant de l'intensité lumineuse moyenne sphérique, qui elle aussi tient compte du rayonnement dans toutes les directions de l'espace, pouvait à ce point de vue, attribuer cette notion à Allard.

Le deuxième document relatif à Allard est resté introuvable jusqu'à ce jour. Nous n'avons donc pas pu faire la preuve de l'origine du diagramme d'Allard et la question reste ainsi en suspens, s'il faut attribuer, comme on le fait habituellement, ce diagramme à Rousseau, ou si celui-ci ne doit être considéré que comme l'auteur de la construction qui porte son nom.

Ayant pu consulter enfin le compte rendu authentique des expériences faites à l'Exposition Internationale de l'Electricité à Paris en 1881, nous avons constaté que la méthode employée par Allard, Le Blanc, Joubert, Potier et Tresca n'est pas celle que nous avions indiquée au paragraphe 8, mais une méthode analytique basée sur l'emploi de zones d'ouverture constante. (1)

Un autre document ancien, que le hasard a fait tomber entre nos mains, nous permet d'ajouter encore le paragraphe suivant à notre travail.

48) *Méthode de la surface d'égal éclairage de Rousseau.*

Sous ce nom Rousseau (2) décrit un procédé entièrement

(1) Ann. Ch. Ph. t. XXIX (5e série), 1883, p. 23.
(2) Ing. Cons. t. VI, 1883/84, p. 246.

identique à celui de Gerhardt que nous avons étudié au paragraphe 28. En effet, il porte des rayons-vecteurs proportionnels à la racine carrée de l'intensité lumineuse, dans des directions faisant avec l'axe du diagramme des angles proportionnels aux angles solides correspondants.

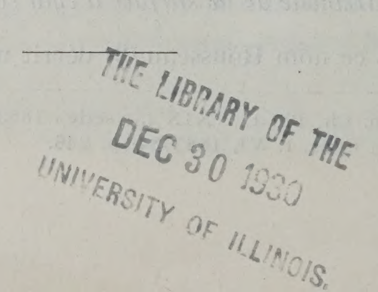
La méthode doit son nom à l'égalité de l'éclairement produit sur des facettes normales aux rayons issus de la source lumineuse et situées à des distances du centre proportionnelles aux rayons-vecteurs portés dans le diagramme. Il est à remarquer cependant, que l'ensemble de ces facettes ne constitue pas une surface à proprement parler.

Nous avons tenu à signaler encore ici cette méthode, pour attirer davantage l'attention sur la diversité des procédés imaginés par cet auteur belge (nous avons pu en décrire 6 au cours de cette étude), datant d'une époque où le système cohérent des grandeurs et unités photométriques, qui nous est familier aujourd'hui, n'était pas encore créé, et où ces notions et leurs relations réciproques étaient encore assez confuses.

A part la construction (1) décrite au paragraphe 7, aujourd'hui classique, on peut dire que le travail de Rousseau est retombé dans l'oubli. Nous sommes d'ailleurs heureux d'avoir pu rétablir la priorité de Rousseau dans deux cas, où ses méthodes avaient été retrouvées plus tard par d'autres auteurs (voir le début de ce paragraphe et le numéro 38), sans pour cela mettre en doute le moins du monde la bonne foi des auteurs ultérieurs.

---

(1) Première publication au Congrès des Electriciens à Paris en 1882, p. 139 des Comptes rendus.




UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 072877811